

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

*О. В. Співаковський, В. А. Крекнін,
К. В. Черниш*

Збірник задач і вправ з лінійної алгебри

*Затверджено Міністерством
освіти і науки України
як посібник для студентів
вищих навчальних закладів*

Херсон 2000

О. В. Співаковський, В. А. Крекнін, К. В. Черниш. Збірник задач і вправ з лінійної алгебри Навчальний посібник.-Херсон, 2000.-208 с.

Використання комп'ютерної техніки дає можливість студентам під час практичного заняття виконати значно більше завдань, ніж при традиційних формах навчання. Для забезпечення студентів необхідним навчальним матеріалом викладачу потрібно мати велику кількість однотипних завдань. Запропонований збірник містить близько 800 задач і вправ з основних тем лінійної алгебри, які можна використовувати при проведенні навчальних занять з курсу лінійної алгебри, а також для складання індивідуальних та контрольних завдань.

Для студентів вищих педагогічних вузів та університетів.

Рецензенти: В. Г. Бутенко, член-кореспондент АПН України,
доктор педагогічних наук, професор.
П. Ф. Жук, доктор фізико-математичних наук.
М. С. Львов, кандидат фізико-математичних наук,
доцент.

ISBN

О. В. Співаковський
В. А. Крекнін
К. В. Черниш, 2000

Вступ.

Курс "Лінійної алгебри" вивчається звичайно в 1-му і 2-му семестрах вищих навчальних закладів. Курс, необхідно відмітити, тяжкий як для студентів так і для викладачів через велику насиченість задач, пов'язаних з великими обчисленнями. Достатньо згадати, скільки разів необхідно обчислити визначник, розв'язувати системи лінійних рівнянь при розв'язуванні задачі знаходження власних векторів і власних значень лінійного оператора, а відповідно перевіряти правильність розв'язування викладачу. І це тільки формальна сторона справи. А ось змістовна - формування вмій і навичок розв'язування задач з навчального курсу лінійної алгебри, причому кероване, контрольоване і ефективне, очевидно, в умовах традиційного навчання стає просто неможливим. Тут необхідно чітко розділяти дві зв'язані між собою задачі, перша з яких полягає в формуванні знань в предметній області, друга - в формуванні відповідних вмій і навичок розв'язування задач з тієї самої області.

Зрозуміло, що перша задача на сьогоднішній день може бути розв'язана тільки викладачем і комп'ютер в цьому випадку буде виступати як інструмент, який виконує управління засвоєнням нових знань.

Але також очевидно і те, що передаючи комп'ютеру управління для розв'язування другої задачі, необхідно чітко уявляти, що програмний продукт повинен повністю підтримувати "ідеологію" теоретичного курсу.

Конкретна реалізація такого погляду в програмно-методичному комплексі "Світ лінійної алгебри" заснована на тому, що теоретичний курс і програмне забезпечення побудовані на роботі з елементарними перетвореннями, починаючи з визначників, систем лінійних рівнянь і закінчуючи жордановими формами, власними векторами і власними значеннями.

Саме ж програмне забезпечення базується на об'єктно-орієнтовному підході, конкретно:

- користувач повинен працювати з реальними об'єктами предметної області (матрицями, системами лінійних рівнянь і т.п.), а тексти і питання з'являються на екрані тільки в самих необхідних випадках;

- користувач повинен працювати тільки в реальній операційній системі, яка однозначно визначається предметною областю (наприклад для матриць: додати два рядки, домножити рядок на число, переставити два рядки місцями, перемножити матриці і т.п.);

- інтерфейс користувача повинен максимально наближатися до звичайного (лист паперу замінитися вікном на екрані, при цьому бажано мати чернетку, яку ніхто не бачить і чистовик для викладача; у вікні чи вікнах знаходиться історія розв'язування користувачем у вигляді послідовності реальних об'єктів навчального курсу, по яких можна пересуватись вперед або назад;

- якщо деякі числові розрахунки не мають відношення до змісту задачі, то програма бере їх на себе);

- програма повинна давати користувачу широку можливість дій у рамках предметної області (наприклад, з матрицею можна робити будь-які елементарні перетворення у будь-якій послідовності, головне знайти її ранг), тобто користувач не повинен знаходитись під тягарем алгоритму розв'язування, визначеного на стадії написання програмно-педагогічного засобу. При цьому користувач мусить мати можливість пересуватись по своїх діях, вставляючи між ними нові. Більш того, користувач повинен мати можливість взагалі відмовитись від операційного середовища ППЗ і будувати довільно новий об'єкт, а справа програми - оцінити правильність його дій, для чого у програмі має бути вмонтований редактор об'єкту;

- користувач повинен завжди мати вихід із скрутних становищ, для чого в ППЗ має бути вмонтований експерт, який вмітиме теоретично пояснити кожен крок, починаючи з того, де перебуває користувач, і, використовуючи тільки певне операційне середовище, показати у вигляді мультимедіа розв'язування поставленої задачі. При цьому, його на відміну від викладача, можна в будь-який момент перервати і продовжити розв'язування самому;

- історія роботи користувача мусить бути представлена у вигляді послідовності його дій, а при бажанні закінчити роботу має з'явитись інформація яка б аналізувала підсумки його дій.

Усі завдання збірника розподілені на 8 підрозділів з таких тем: обчислення рангу матриці, обчислення визначників, знаходження оберненої матриці, розв'язування систем лінійних рівнянь, знаходження характеристичного поліному квадратної матриці, знаходження власних значень та власних векторів лінійного оператора, побудова жорданової форми матриці, ортогоналізація системи векторів скінченновимірного евклідового простору. З кожного розділу запропоновано близько 100 завдань, які дають студентам можливість оволодіти методами розв'язування задач лінійної алгебри. Для кожної теми наведені приклади розв'язування задач.

Слід зазначити, що використання інформаційних технологій дозволяє студентам під час практичного заняття виконувати значно більше завдань, ніж при традиційних формах навчання. Для забезпечення студентів необхідним навчальним матеріалом викладачу потрібно мати велику кількість однотипних задач і вправ. Збірники задач з вищої алгебри, які існують, не можуть в цьому відношенні задовольнити вказану потребу. «Збірник задач і вправ з лінійної алгебри» є спробою усунути цю прогалину у навчальній літературі. Він дає можливість викладачу посилити індивідуальний підхід при викладанні матеріалу, прослідкувати кожне поняття у динаміці зміни початкових умов і якісних характеристик, розробити чималу кількість самостійних та контрольних завдань.

Рішення систем лінійних рівнянь.

Метод Гауса розв'язання системи лінійних рівнянь полягає у послідовному виключенні змінних з рівнянь згаданої системи за допомогою елементарних перетворень. Розглянемо відповідні приклади.

Приклад 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = -1 \\ 7x + 9y - 9z = 5 \\ 4x - 2y + 15z = 62 \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 7 & 3 & -6 & -1 \\ 7 & 9 & -9 & 5 \\ 4 & -2 & 15 & 62 \end{pmatrix}$$

Процес виключення змінних у системі лінійних рівнянь можна здійснювати за допомогою елементарних перетворень над рядками розширеної матриці;

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 7 & 3 & -6 & -1 \\ 7 & 9 & -9 & 5 \\ 4 & -2 & 15 & 62 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 0 & 17 & -75/2 & -99 \\ 0 & 23 & -81/2 & -93 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 17 & -75/2 & -99 \\ 0 & 23 & -81/2 & -93 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -89 & -116 \\ 0 & 0 & -29 & -116 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -29 & -116 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, дана система лінійних рівнянь є еквівалентною системі:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 2y - z = 2 \\ -29z = -116 \end{cases}$$

Звідси отримаємо; $z=4$, $2y-4=2$, $2y=6$, $y=3$, $2x-12+36=28$, $2x=4$, $x=2$.
отже розв'язком системи є вектор $(2,3,4)$.

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ 2x - y - z = 2 \\ x + y + 10z = 6 \end{cases}$$

Розглянемо розширену матрицю системи і перетворимо її.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & -4 & -28 & -13 \\ 0 & -3 & -21 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 13/4 \\ 0 & 1 & 7 & 10/3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 13/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix}$$

Отримали систему, у якій останнє рівняння має вигляд $0=1/12$. отже дана система лінійних рівнянь не є сумісною.

Приклад 3. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2y + z + 2t = 0 \\ 2x - y + 3z - 2t = 0 \\ 7x - y + 10z - 4t = 0 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Дана система є однорідною. Запишемо її основну матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 7 & -1 & 10 & -4 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -6 \\ 0 & -15 & 3 & -18 \\ 0 & -5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отримали систему:

$$\begin{cases} x + 2y + z + 2t = 0 \\ -5y + z - 6t = 0 \end{cases}$$

Дана система від 4-х змінних має два рівняння. Її ранг дорівнює двом. Звідси випливає, що 2 змінних можна вважати вільними. Нехай вільними будуть змінні y і t . Перетворимо систему перенесенням вільних змінних у ліві частини рівняння;

$$\begin{cases} x + z = -2y - 2t \\ z = 5y + 6t \end{cases}$$

$$x + 5y + 6t = -2y - 2t, \quad x = -7y - 8t.$$

Отже загальним розв'язком даної системи є вектор $(-7y - 8t, y, +5y + 6t, t)$. Знайдемо фундаментальну систему розв'язків; надаємо змінним y і t відповідно значення $(1, 0)$, а потім $(0, 1)$. Тоді

отримаємо два вектора: $(-7, 1, 5, 0)$ і $(-8, 0, 6, 1)$. Ці два вектора складають фундаментальну систему розв'язків.

Приклад 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

Розглянемо розширену матрицю системи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже дана система є еквівалентною системі:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ -y + z = -1 \end{cases}$$

Ця система 3-х змінних має ранг 2, тому одна із змінних є вільною. Будемо вважати вільною змінну z , тоді $y = z + 1$, $x + 2y - 4z = 1$, $x + 2z + 2 - 4z = 1$, $x = 2z - 1$. Отже загальним розв'язком даної системи є вектор $(2z - 1, z + 1, z)$. Якщо надати z значення, наприклад, 0, то отримаємо частий розв'язок $(-1, 1, 0)$.

Загальним розв'язком відповідної однорідної системи лінійних рівнянь є вектор $(2z, z, z)$.

Якщо надати z значення 1, то отримаємо фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи, яка у даному випадку складається з одного вектору $(2, 1, 1)$.

Розв'язок системи лінійних рівнянь за формулами Крамера.

Нехай дано квадратну систему лінійних рівнянь, тобто систему у якій число рівнянь дорівнює кількості змінних.

Приклад. Знайти рішення системи лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язок.

Для розв'язання треба визначити - являється основна матриця системи A невивродженою чи ні. Якщо так, то знайти єдине рішення по формулам Крамера: $x_i = |B_i|/|A|$, де B_i - матриця, отримана з A заміною стовпця коефіцієнтів при змінній x_i на стовпець вільних членів.

Складемо матрицю з коефіцієнтів даної системи і знайдемо її ранг за допомогою елементарних перетворень.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця A еквівалентна матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Матриця A -невивроджена, її ранг дорівнює 3.

Система лінійних рівнянь має єдине рішення. Для використання формул Крамера обчислимо визначник матриці A . Він дорівнює одиниці ($2 \cdot 1 \cdot 1/2 = 1$).

Знайдемо x_1 . Для цього утворимо B_1 , заміною першого стовпця на стовпець вільних членів, і обчислимо визначник.

$$B_1 = |B_1| = -2, \quad x_1 = |B_1|/|A|, \quad x_1 = -2/1 = -2.$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

По аналогії знайдемо x_2 і x_3 .

$$B_2 = |B_2| = 4, \quad x_2 = |B_2|/|A|, \quad x_2 = 4/1 = 4.$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad |B_3| = -2, \quad x_3 = |B_3|/|A|, \quad x_3 = -2/1 = -2.$$

Таким чином рішенням системи є $x_1 = -2, x_2 = 4, x_3 = -2$.

Вправи. №№567-581, 689-704, 706-711, 724-732, 735-740 системи лінійних рівнянь вирішуються методом виключення змінних, №№22-25, 28-29, 74-77, 82-85, 554-563 системи лінійних рівнянь вирішуються за правилом Крамера. (И.В.Проскураков, Сборник задач по линейной алгебре).

Тема “Системи лінійних рівнянь”

Завдання: Розв’язати систему лінійних рівнянь.

Вправа №1

$$\begin{cases} 2x & -y & -z & -t & -u & =1 \\ 3x & -6y & +4z & -3t & & =14 \\ 2x & -2y & +3z & & +u & =8 \\ x & -y & +z & +t & +u & =2 \\ x & +y & & +2t & +u & =-1 \end{cases}$$

Вправа №2

$$\begin{cases} 3x & & +z & -2t & 2u & =11 \\ x & +y & +z & -t & +u & =5 \\ & 2y & +z & +t & +u & =4 \\ 4x & -3y & & -6t & +5u & =20 \\ 3x & +y & +z & +t & -2u & =0 \end{cases}$$

Вправа №3

$$\begin{cases} x & -4y & +3z & -t & & =-9 \\ x & +3y & & -t & +2u & =0 \\ 2x & +3y & -2z & +t & -u & =6 \\ x & +6y & -2z & +t & +u & =11 \\ x & & +z & -t & +u & =-4 \\ 2x & +y & +3z & -2t & +2u & =-5 \end{cases}$$

Вправа №4

$$\begin{cases} x & -3y & +3z & -t & -4u & =9 \\ 2x & -4y & +4z & -t & -5u & =14 \\ & y & -3z & & +4u & =-10 \\ 2x & -3y & +2z & & -4u & =13 \\ x & -2y & +z & -t & -2u & =4 \end{cases}$$

Вправа №5

$$\begin{cases} 2x & +3y & +z & +t & +u & =8 \\ 2x & +2y & +2z & +t & & =7 \\ x & +2y & +2z & +2t & +u & =7 \\ x & +y & +z & +2t & +u & =4 \\ & y & & +t & +u & =2 \end{cases}$$

Вправа №6

$$\left\{ \begin{array}{l} x \quad +2y \quad +2z \quad +t \quad \quad \quad =7 \\ x \quad +y \quad +2z \quad +2t \quad +u \quad =7 \\ x \quad \quad \quad +z \quad +t \quad +u \quad =2 \\ 2x \quad +2y \quad +z \quad +t \quad \quad \quad =6 \\ 3x \quad +2y \quad +2z \quad +t \quad +u \quad =6 \\ 2x \quad +y \quad +3z \quad +3t \quad +2u \quad =9 \end{array} \right.$$

Вправа №7

$$\left\{ \begin{array}{l} x \quad +y \quad +2z \quad +t \quad -u \quad =0 \\ -x \quad +y \quad \quad \quad +5t \quad +5u \quad =0 \\ 2x \quad +y \quad +2z \quad +2t \quad \quad \quad =0 \\ 2x \quad +y \quad +4z \quad \quad \quad -4u \quad =0 \\ 3x \quad +2y \quad +6z \quad +t \quad -5u \quad =0 \end{array} \right.$$

Вправа №8

$$\left\{ \begin{array}{l} x \quad +2y \quad +2z \quad +3t \quad -2u \quad =0 \\ 2x \quad +5y \quad +3z \quad +6t \quad -u \quad =0 \\ x \quad +3y \quad +2z \quad +5t \quad +3u \quad =0 \\ 2x \quad +3y \quad +5z \quad +3t \quad -4u \quad =0 \\ x \quad +2y \quad +z \quad +t \quad -4u \quad =0 \end{array} \right.$$

Вправа №9

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x \quad +y \quad +3z \quad +2t \quad -u \quad =0 \\ 2x \quad +2y \quad +5z \quad +4t \quad -u \quad =0 \\ x \quad +2y \quad +3z \quad +4t \quad -2u \quad =0 \\ x \quad +y \quad +z \quad +2t \quad -2u \quad =0 \\ 3x \quad +2y \quad +4z \quad +4t \quad -3u \quad =0 \end{array} \right.$$

Вправа №10

$$\left\{ \begin{array}{l} x \quad +3y \quad -2z \quad +t \quad +3u \quad =0 \\ 2x \quad +4y \quad -5z \quad +5t \quad +5u \quad =0 \\ 2x \quad +10y \quad -3z \quad -5t \quad +10u \quad =0 \\ x \quad -y \quad -3z \quad +8t \quad -u \quad =0 \\ x \quad +y \quad -3z \quad +6t \quad +u \quad =0 \end{array} \right.$$

Вправа №11

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x \quad +3y \quad +2z \quad -2t \quad +u \quad =0 \\ x \quad +y \quad -z \quad -t \quad \quad \quad =0 \\ 2x \quad +3y \quad +z \quad \quad \quad -3u \quad =0 \\ x \quad +2y \quad +3z \quad -2t \quad +3u \quad =0 \\ x \quad +2y \quad +4z \quad -2t \quad +3u \quad =0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №12} \\ x & +3y & +3z & -4t & +2u & =0 \\ x & +y & +2z & -3t & +u & =0 \\ 3x & +y & +6z & -9t & +3u & =0 \\ x & -3y & +z & -2t & & =0 \\ 2x & -2y & +3z & -4t & +3u & =0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №13} \\ 2x & +y & +3z & +2t & -2u & =0 \\ 2x & +2y & +3z & +5t & -4u & =0 \\ x & +y & +3z & -2t & +u & =0 \\ x & +y & +2z & +t & -u & =0 \\ x & +2y & +3z & & -2u & =0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №14} \\ x & -2y & +2z & -3t & +u & =0 \\ 2x & -3y & +z & -6t & +4u & =0 \\ x & -3y & +5z & -3t & -u & =0 \\ x & -2y & +6z & -t & -3u & =0 \\ 2x & -4y & +6z & -5t & & =0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №15} \\ x & +2y & +3z & +2t & -2u & =0 \\ 2x & +5y & +3z & +3t & +3u & =0 \\ 3x & +8y & +4z & +5t & +6u & =0 \\ x & +2y & +2z & +t & & =0 \\ x & +3y & +z & +2t & +3u & =0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №16} \\ x & -2y & +3z & +t & +3u & =0 \\ 2x & -3y & +5z & +3t & +8u & =0 \\ x & & +z & +3t & +7u & =0 \\ x & -y & +2z & +2t & +5u & =0 \\ x & +y & & +4t & +9u & =0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №17} \\ x & +2y & +z & +t & +u & =0 \\ 2x & +5y & +2z & -2t & -3u & =0 \\ 3x & +4y & +z & +9t & +9u & =0 \\ x & +3y & +4z & & +2u & =0 \\ 3x & +5y & +2z & +6t & +6u & =0 \\ 2x & +3y & +z & +5t & +5u & =0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №18} \\ 2x \quad +y \quad +2z \quad +t \quad +2u \quad =0 \\ x \quad +y \quad -z \quad +2t \quad +6u \quad =0 \\ 2x \quad +3y \quad -2z \quad +t \quad +8u \quad =0 \\ \quad +2y \quad +2z \quad -3t \quad -3u \quad =0 \\ x \quad \quad +z \quad +2t \quad +3u \quad =0 \\ 2x \quad +y \quad -2z \quad +2t \quad +6u \quad =0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №19} \\ x \quad +2y \quad -z \quad +3t \quad +8u \quad =0 \\ 2x \quad -y \quad +2z \quad +t \quad -7u \quad =0 \\ 2x \quad +3y \quad -2z \quad +t \quad +9u \quad =0 \\ x \quad +y \quad +z \quad +2t \quad +u \quad =0 \\ x \quad -2y \quad -2z \quad +3t \quad +2u \quad =0 \\ x \quad \quad +z \quad +4t \quad +u \quad =0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №20} \\ x \quad +y \quad +2z \quad +2t \quad +u \quad =0 \\ 3x \quad -y \quad +z \quad +3t \quad \quad =0 \\ 2x \quad +2y \quad +3z \quad +5t \quad -u \quad =0 \\ x \quad +3y \quad -4z \quad +t \quad -u \quad =0 \\ 2x \quad +y \quad -3z \quad -4t \quad +10u \quad =0 \\ 4x \quad -5y \quad +2z \quad +t \quad +3u \quad =0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №21} \\ 2x \quad +2y \quad +3z \quad +5t \quad -9u \quad =0 \\ x \quad -3y \quad +2z \quad +7t \quad -10u \quad =0 \\ 2x \quad +5y \quad +2z \quad +t \quad -3u \quad =0 \\ 3x \quad +y \quad -z \quad +4t \quad +u \quad =0 \\ \quad +2y \quad +z \quad -t \quad -u \quad =0 \\ x \quad +y \quad +2z \quad +3t \quad -6u \quad =0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №22} \\ 3x \quad +2y \quad +2z \quad +10t \quad -u \quad =0 \\ x \quad +2y \quad +2z \quad +6t \quad +u \quad =0 \\ 2x \quad +y \quad +z \quad +6t \quad -u \quad =0 \\ 2x \quad +3y \quad -5z \quad +2t \quad +17u \quad =0 \\ x \quad +4y \quad +3z \quad +9t \quad +5u \quad =0 \\ x \quad -y \quad \quad +t \quad -4u \quad =0 \end{array} \right.$$

Вправа №23

$$\begin{cases} x & +2y & +2z & +t & -3u & =0 \\ 2x & +y & -2z & -t & -6u & =0 \\ 2x & +3y & +z & & -7u & =0 \\ 3x & -y & -2z & +2t & -3u & =0 \\ & +2y & -3z & -5t & -7u & =0 \end{cases}$$

Вправа №24

$$\begin{cases} x & -y & +2z & +4t & +3u & =0 \\ 2x & +3y & +z & -t & +u & =0 \\ x & & +2z & +4t & +2u & =0 \\ x & +2y & +z & +t & & =0 \\ 2x & +y & +4z & +8t & +3u & =0 \end{cases}$$

Вправа №25

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & -2t & +4u & =0 \\ x & +3y & +4z & -2t & +5u & =0 \\ 2x & +3y & -2z & +3t & -7u & =0 \\ -3x & +y & +2z & +2t & +3u & =0 \\ x & +7y & -z & +7t & -9u & =0 \end{cases}$$

Вправа №26

$$\begin{cases} x & +2y & -3z & +t & -4u & =0 \\ 2x & +3y & -4z & +t & -7u & =0 \\ 3x & -y & +5z & -4t & -5u & =0 \\ x & -2y & +5z & -3t & & =0 \\ x & -y & +3z & -2t & -u & =0 \end{cases}$$

Вправа №27

$$\begin{cases} -3x & +2y & +4z & +3t & -5u & =0 \\ x & +2y & +4z & -t & -u & =0 \\ 2x & +3y & +6z & -2t & -u & =0 \\ x & +y & +2z & -t & & =0 \\ x & -2y & -4z & -t & +3u & =0 \end{cases}$$

Вправа №28

$$\begin{cases} 2x & -y & +2z & +t & -5u & =8 \\ x & +3y & -z & +2t & +6u & =-4 \\ x & +2y & +2z & +3t & +4u & =-5 \\ 3x & & -5z & -2t & -5u & =18 \\ 2x & +2y & +z & +3t & +3u & =-1 \end{cases}$$

Вправа №29

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - y + 4z - 2t + u = 12 \\ 2x + 2y + z + 3t - 7u = 2 \\ x - 2y + 3z + 2t - 11u = 3 \\ 2x + 3y + z + t + u = 4 \\ 2x - 2y + 3z - 3t + 3u = 10 \\ x + 2y + 2z + t = 3 \end{array} \right.$$

Вправа №30

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 2z - t + 2u = 5 \\ x - 2y + 3z + 2t + 4u = 8 \\ 3x + y + 3t - 2u = 6 \\ x + 2y + 2z + t + 5u = 13 \\ \quad \quad \quad + 3y + z - 3t + 2u = 0 \end{array} \right.$$

Вправа №31

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 2z + 3t + 6u = 7 \\ x - y + 3z + 2t - 4u = -7 \\ x + 2y + 2z - t + 3u = 9 \\ 3x + 2y + 4z + t + 3u = 9 \\ 2x + y + 5t + 4u = 3 \\ 2x + 3y + 4z - 3t + 4u = 15 \end{array} \right.$$

Вправа №32

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 2y + 3z + t + 6u = 5 \\ x + 2y + z + 2t - 5u = -2 \\ 3x + y + 4z + 2t = 3 \\ 2x + 3y + 2z - 3t - u = 4 \\ x - 3y - z + 2t + 3u = 3 \end{array} \right.$$

Вправа №33

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z + 3t + 3u = 3 \\ 2x + 3y - z - 2t - 7u = -1 \\ 2x + 2y + 3z + 2t + u = 2 \\ x + 2y + 3z + 2t + 3u = 3 \\ 3x - y + 4t - 2u = 0 \end{array} \right.$$

Вправа №34

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 2z - 5u = -7 \\ x - 3y + 3z + 4t + u = 4 \\ 3x + 4y + 2z + 5t - 10u = -8 \\ 2x - 5y - 3z - t + u = -2 \\ x + 2y - 2z - t - 4u = -6 \\ x + y + z + 2t - 3u = -2 \end{array} \right.$$

Вправа №35

$$\begin{cases} x & -2y & +3z & +10t & -5u & =3 \\ 3x & -y & +2z & +6t & & =1 \\ 2x & -2y & +z & +6t & -4u & =5 \\ & +2y & +3z & +2t & +6u & =-9 \\ 2x & -3y & -4z & -2t & -7u & =13 \end{cases}$$

Вправа №36

$$\begin{cases} 2x & +y & +2z & -t & & =3 \\ 3x & -y & +4z & -4t & -u & =3 \\ 2x & +5y & -3z & +3t & +5u & =2 \\ x & +3y & +2z & +2t & -u & =5 \\ 3x & +2y & +5z & -t & -2u & =7 \end{cases}$$

Вправа №37

$$\begin{cases} 2x & +3y & -2z & -2t & -u & =7 \\ x & +2y & +2z & -5t & +3u & =0 \\ 3x & -y & +5z & & +u & =8 \\ 2x & +y & +3z & -3t & +2u & =4 \\ x & -2y & +2z & +3t & -u & =4 \end{cases}$$

Вправа №38

$$\begin{cases} x & +3y & -2z & -5t & +2u & =12 \\ 2x & -y & +z & +2t & +u & =-3 \\ 3x & +2y & -z & -3t & +3u & =9 \\ x & +5y & +4z & -t & -12u & =-10 \\ 2x & +4y & -3z & -7t & +4u & =18 \end{cases}$$

Вправа №39

$$\begin{cases} 3x & +2y & +2z & -t & +2u & =4 \\ 5x & -3y & +z & +7t & +5u & =13 \\ 2x & +5y & -4z & +t & -13u & =-1 \\ x & +3y & +2z & -4t & +u & =-1 \\ 2x & -y & +3z & & +7u & =5 \\ x & +y & +2z & -2t & +3u & =1 \end{cases}$$

Вправа №40

$$\begin{cases} x & +3y & +2z & +t & -7u & =5 \\ 5x & -2y & +3z & -5t & -11u & =4 \\ 3x & +y & +z & & -8u & =0 \\ 2x & -2y & -3z & +t & +u & =-11 \\ x & +2y & -2z & 4t & -2u & =-7 \end{cases}$$

Вправа №41

$$\begin{cases} x & +3y & +2z & -4t & -u & =-2 \\ 2x & -y & +3z & & -u & =-1 \\ 4x & +2y & -z & +3t & +5u & =19 \\ 3x & -2y & +3z & +2t & & =3 \\ 2x & +y & +4z & -3t & -2u & =-4 \end{cases}$$

Вправа №42

$$\begin{cases} 3x & -y & -7z & -t & +5u & =3 \\ 2x & +3y & -z & -8t & -4u & =-20 \\ 4x & -y & -9z & -2t & +6u & =2 \\ 2x & -5y & -9z & +8t & +12u & =28 \\ x & +2y & & -5t & -3u & =-13 \end{cases}$$

Вправа №43

$$\begin{cases} 3x & -4y & +z & +11t & -10u & =7 \\ 2x & +3y & -5z & -4t & -u & =-1 \\ x & -2y & +z & +5t & -4u & =3 \\ 4x & +3y & -7z & -2t & -5u & =1 \\ 2x & -3y & +z & +8t & -7u & =5 \end{cases}$$

Вправа №44

$$\begin{cases} 2x & -y & -3z & -5t & +4u & =-1 \\ 3x & +4y & -10z & -2t & -5u & =4 \\ x & +3y & -5z & +t & -5u & =3 \\ 2x & -5y & +z & -9t & +12u & =-5 \\ 3x & +2y & -8z & -4t & -u & =2 \end{cases}$$

Вправа №45

$$\begin{cases} 2x & -y & +2z & -8t & =0 \\ x & +3y & +3z & -t & =0 \\ 3x & +2y & -z & +3t & =0 \\ 2x & -3y & +2z & -12t & =0 \end{cases}$$

Вправа №46

$$\begin{cases} 2x & +5y & +3z & +3t & =0 \\ 3x & -2y & +4z & -4t & =0 \\ 4x & +y & -2z & +13t & =0 \\ 2x & +3y & +3z & +t & =0 \end{cases}$$

Вправа №47

$$\begin{cases} 3x & +y & -4z & -2t & =0 \\ 2x & -3y & +3z & -7t & =0 \\ 4x & +2y & -5z & -3t & =0 \\ x & +3y & -2z & & =0 \\ 5x & +4y & -3z & -7t & =0 \end{cases}$$

Вправа №48

$$\begin{cases} 2x & -3y & +5z & +9t & =0 \\ x & +2y & -z & -6t & =0 \\ 4x & -y & +2z & & =0 \\ 3x & -2y & +2z & +3t & =0 \end{cases}$$

Вправа №49

$$\begin{cases} 2x & +y & +z & -3t & =0 \\ x & +3y & -2z & +11t & =0 \\ 3x & +4y & +5z & -10t & =0 \\ 2x & -2y & +3z & -15t & =0 \end{cases}$$

Вправа №50

$$\begin{cases} x & +3y & +2z & -t & =0 \\ 2x & +y & -3z & +t & =0 \\ 4x & +2y & +z & +9t & =0 \\ 3x & +2y & +2z & +7t & =0 \end{cases}$$

Вправа №51

$$\begin{cases} x & +3y & +2z & -3t & =0 \\ 4x & -y & -5z & +14t & =0 \\ 2x & +5y & +3z & -4t & =0 \\ 3x & +2y & -z & +5t & =0 \end{cases}$$

Вправа №52

$$\begin{cases} 3x & +y & +z & -7t & =0 \\ 4x & -3y & +10z & -5t & =0 \\ 2x & +3y & -4z & -7t & =0 \\ x & +4y & -7z & -6t & =0 \end{cases}$$

Вправа №53

$$\begin{cases} 2x & +3y & -z & +4t & =0 \\ x & +5y & -4z & +9t & =0 \\ 3x & -y & +4z & -5t & =0 \\ x & +2y & -z & +3t & =0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №54} \\ 2x + 5y + 3z - t = 0 \\ x + 3y + 2z - t = 0 \\ 3x + 2y - z + 4t = 0 \\ 2x - y - 3z + 5t = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №55} \\ 2x + 3y + z + t = 1 \\ x + 3y + 2z + 2t = -1 \\ 3x - y - 3z - 2t = 4 \\ 2x + 2y + 3z + 6t = -7 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №56} \\ 2x + 3y + 4z + 4t = 15 \\ x - 2y + 2z - 5t = 11 \\ 3x + y - 5z - t = -7 \\ 4x - y + 3z - 6t = 22 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №57} \\ 2x + y + 3z - 4t = -2 \\ 3x - 2y + z + t = 4 \\ 4x + 3y + 3z - 2t = 6 \\ x + 2y - 2z + 5t = 11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №58} \\ 3x + y + 2z - 4t = -5 \\ 2x - 3y + z + 5t = 5 \\ x + 2y - z - 3t = 0 \\ 2x + 2y - 3z - t = 7 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №59} \\ x - 2y + z + 5t = 4 \\ 2x + 3y + 5z - t = 4 \\ 3x + y + 4z + 2t = 6 \\ x + 2y + 2z - 2t = 1 \\ 2x + 2y + 5z + t = 5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №60} \\ 2x + 3y + 4z + 7t = -1 \\ 3x + 2y + z + 8t = 6 \\ x - 3y - 7z - t = 13 \\ 2x - 5y - 12z - t = 23 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №61} \\ 3x + y + 4z - 5t = 13 \\ 2x - 5y - 3z + 8t = 3 \\ 4x + 3y + 7z - 10t = 19 \\ x + 3y + 4z - 7t = 7 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №62} \\ 5x + 2y - z - 8t = -22 \\ 3x + y - z - 5t = -13 \\ x + 4y + 7z + 2t = -8 \\ 2x + 9y + 16z + 5t = -17 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №63} \\ 2x + 5y + 7z + t = 7 \\ 3x + 2y + 5z - 4t = 16 \\ 2x + 3y + 5z - t = 9 \\ x + 5y + 6z + 3t = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №64} \\ 2x + y + 3z + 2t - u = -2 \\ x - 2y + 2z - 3t + 4u = 3 \\ 3x + 2y + z - t + 2u = 1 \\ 5x + 3y + 4z + t + u = 2 \\ 3x - y + 5z - t + 3u = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №65} \\ 3x + 2y - z + t + 2u = 1 \\ 2x - y + 3z + 2t + u = -2 \\ 4x - 3y - 2z + t + 3u = 2 \\ 3x - 6y + 2z + 2t + 2u = 5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №66} \\ x + 3y + 2z - t + 3u = 1 \\ 2x + y - z + 5t + u = 3 \\ 3x - 2y + z + 2t + 6u = -2 \\ 2x - 2y - z + 4t + 2u = 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №67} \\ 2x + y + 3z - 2t + 4u = 2 \\ x - 2y + 2z + t + 3u = 3 \\ 3x + 2y - 4z + 2t - u = -5 \\ x + 2z + 3t + 2u = 1 \\ 2x + y - 5z + 7t - 3u = 4 \end{array} \right.$$

Вправа №68

$$\begin{cases} 4x & +2y & +z & -2t & +3u & =8 \\ 2x & -3y & -2z & +5t & -2u & =3 \\ 3x & +5y & -4z & +3t & +u & =-2 \\ x & & -7z & +10t & -4u & =5 \\ 5x & -y & +6z & -7t & +5u & =9 \end{cases}$$

Вправа №69

$$\begin{cases} 3x & -2y & +4z & +t & +5u & =7 \\ 2x & +8y & -3z & +2t & -3u & =0 \\ 6x & -3y & +5z & -t & +4u & =3 \\ 5x & +7y & -2z & & -4u & =5 \end{cases}$$

Вправа №70

$$\begin{cases} x & +4y & -6z & +2t & =4 \\ 3x & +5y & -2z & +3t & =2 \\ 2x & +2y & +3z & +5t & =7 \\ 5x & +2y & +15z & +13t & =-5 \end{cases}$$

Вправа №71

$$\begin{cases} 3x & +4y & +2z & -t & =-3 \\ 5x & -2y & +3z & +2t & =1 \\ 2x & +7y & -4z & +3t & =5 \\ x & -3y & +6z & -4t & =2 \end{cases}$$

Вправа №72

$$\begin{cases} x & +2y & +z & -3t & =4 \\ 2x & -5y & +3z & +2t & =-6 \\ 4x & +y & +2z & -t & =3 \\ 2x & +6y & -z & -3t & =5 \end{cases}$$

Вправа №73

$$\begin{cases} 3x & -2y & +2z & +5t & =4 \\ 2x & +4y & -z & +3t & =0 \\ 2x & -3y & +3z & +4t & =3 \\ 5x & +2y & +z & +8t & =-1 \end{cases}$$

Вправа №74

$$\begin{cases} 2x & +y & -3z & -6t & =8 \\ x & -2y & & +5t & =0 \\ 3x & +3y & -4z & -11t & =13 \\ 3x & +y & -2z & -3t & =9 \\ 5x & +y & -5z & -7t & =16 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №75} \\ -2x + 5y - z - 3t + 3u = 11 \\ x - 2z + t = -5 \\ -3x + 9y - 3z - 2t + 4u = 14 \\ 3x - 7y + z - 2u = -12 \\ -5x + 11y - z - 4t + 5u = 24 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №76} \\ 4x + y + 2z - t = 12 \\ 4x + 4y + 3z - t = 12 \\ 3x + 3y + 2z - t = 8 \\ -2x - y - z + t = -5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №77} \\ 5x - 2y - t = -3 \\ -2x + y + z + t = 2 \\ 4x - 3y + 5z + 2t = -4 \\ x - y + 2z + t = -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №78} \\ x + y - z + 2t = 1 \\ x + 2y - t = -1 \\ -x + 3z - 7t = -3 \\ 2x + y - 5z + 12t = 5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №79} \\ x - y + 2z - t = -3 \\ -x + 2y - 3z + 2t = 5 \\ 2x - 3y + 6z - t = -1 \\ x - 2y + 5z + 3t = 12 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №80} \\ x + 2y - z + 2t = 3 \\ x + y + t = 1 \\ 2x + 2y + z = 5 \\ x + 3y - 4z + 8t = -2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вправа №81} \\ 4x + 5y + 4z - 2t = 4 \\ 2x + 2y + 2z - t = 2 \\ 3x + z - 2t = -6 \\ -2x - y - z + t = 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №82} \\ 2x & +y & +3z & +2t & =1 \\ 3x & -2y & +z & +4t & =-4 \\ x & +3y & -2z & +3t & =5 \\ 2x & +3y & -2z & +t & =12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №83} \\ 8x & +5y & +4z & +3t & =6 \\ 4x & +3y & +2z & +2t & =5 \\ 2x & +y & +z & +t & =2 \\ x & +y & & +t & =2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №84} \\ 3x & +4y & +3z & =11 \\ x & +y & +2z & =7 \\ x & +3y & +4z & =11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №85} \\ 2x & -2y & +z & =6 \\ 3x & +2y & +4z & =4 \\ 2x & +y & +2z & =1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №86} \\ x & +2y & +3z & =1 \\ 3x & +y & +2z & =4 \\ 2x & +3y & +z & =-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №87} \\ 2x & 2y & +z & =5 \\ 3x & -2y & +3z & =1 \\ x & 3y & +2z & =2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №88} \\ x & +4y & +z & =12 \\ -3x & +2y & +3z & =2 \\ 3x & +2y & +2z & =3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №89} \\ x & +4y & +3z & =4 \\ 2x & +3y & +2z & =3 \\ x & +2y & +2z & =5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №90} \\ x & -y & +2z & =9 \\ x & +2y & +4z & =-4 \\ x & +3y & +9z & =-4 \end{cases}$$

Вправа №91

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 2z - t - 3u = 8 \\ 2x + y + 3z - 6t - 5u = 0 \\ 3x + 2y - 2z - 2t - u = -5 \\ x + 2y - 3z + 3t + 2u = 0 \\ 2x - 2y + z - 7t - 3u = -11 \\ 2x + 3y - 5z + 4t + 3u = -2 \end{array} \right.$$

Вправа №92

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - y + 2z + 2t - 7u = 4 \\ 2x + 3y - z - 7t - u = -15 \\ x + 4y - 3z - 11t + 2u = -19 \\ 5x - 2y + 2z + t - 12u = 5 \\ 2x + y + 3z + 3t - 3u = 1 \end{array} \right.$$

Вправа №93

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - 3z - t + 5u = -4 \\ 4x + 3y - 4z - 2t + 9u = 13 \\ 5x + y - 3z - t + 9u = 12 \\ 6x - 6z - t + 14u = 13 \\ 9x + 4y - 9z - 4t + 22u = 26 \end{array} \right.$$

Вправа №94

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 7 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ 3x + y + 2z = 8 \\ 4x + 5y - z = 7 \end{array} \right.$$

Вправа №95

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + 3y - 5z = 10 \\ x + 2y - 5z = 5 \\ 3x + 2y - 7z = 3 \\ 2x + 3y - 8z = 7 \end{array} \right.$$

Вправа №96

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 4z = 5 \\ x + 3y - 7z = 7 \\ 3x + 4y - 6z = 11 \\ x + y - z = 3 \end{array} \right.$$

Вправа №97

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y - 2z = 5 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 2x - 3z = 12 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №98} \\ x & +y & -3z & -t & & =0 \\ 4x & +3y & -4z & -2t & & =0 \\ 5x & +y & -3z & -t & -3u & =0 \\ 6x & & -6z & -t & -6u & =0 \\ 9x & +4y & -9z & -4t & -2u & =0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №99} \\ 2x & -y & & +2t & =0 \\ 9x & +5y & -7z & -3t & =0 \\ 4x & -y & -z & +t & =0 \\ 7x & +5y & -6z & -t & =0 \\ -6x & -3y & +5z & +4t & =0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №100} \\ x & -2y & +3z & +2t & =0 \\ x & +2y & & +t & =0 \\ 4x & +y & +2z & +4t & =0 \\ & +y & -2z & -2t & =0 \\ 2x & -3y & +3z & -t & =0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Вправа №101} \\ x & -2y & +z & =0 \\ 2x & -y & +z & =0 \\ x & +2y & +2z & =0 \\ 2x & +3y & +z & =0 \end{cases}$$

Обчислення визначника матриці.

Користуючись методом Гауса (методом елементарних перетворень) треба привести матрицю до діагонального (або трикутного) виду, пам'ятаючи, при цьому, що перестановка рядків чи стовпців змінює знак визначника. Визначник отримується як добуток елементів головної діагоналі матриці.

Приклад. Знайти визначник матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок.

При розв'язку задачі Ваші дії такі, як при обчисленні рангу матриці. Продемонструємо процес Гауса на прикладі таблиці.

Крок	Дія	Результат
Рядок 2=рядок 1 * $-\frac{1}{3}$ +рядок 2 *1		$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & \frac{4}{3} \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
Рядок 3=рядок 1 * -1 +рядок 3 *1		$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & \frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
Рядок 4=рядок 1 * $-\frac{2}{3}$ +рядок 4 *1		$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & \frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
Рядок 3=рядок 2 * -1 +рядок 3 *1		$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Рядок 4=рядок 2 *1+рядок 4 *1

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -2 & -4/3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Рядок 4=рядок 3 *5/2+рядок 4 *1

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -2 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & -7/3 \end{pmatrix}$$

Отримана матриця має трикутний вид. Додамо елементи головної діагоналі: $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-7/3) = -14$. Визначник вихідної матриці дорівнює -14.

Вправи. №№43-55, 257-277, 425-436, 445-450. (И.В.Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре).

Тема "Визначники"

Завдання: Знайти визначник матриці

Вправа №1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №3

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №5

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №6

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №7

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №15} \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №16} \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №17} \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №18} \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №19} \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №20} \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №21} \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №22} \\ 1 & 6 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №23

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №24

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №25

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №26

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №27

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ 7 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Вправа №28

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №29

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №30

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №31

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \\ 5 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №32

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №33

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Вправа №34

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №35

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -2 & -4 \\ -2 & -6 & 0 & 3 \\ 5 & 10 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

Вправа №36

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №37

4	-5	-2	2	2
-10	10	7	-5	0
-3	2	2	-2	2
-2	2	2	0	0
8	-8	-4	4	1

Вправа №38

-3	0	2	0	-2
-2	0	2	1	0
-8	-3	7	3	2
4	4	-4	-3	0
4	3	-4	-3	1

Вправа №39

9	4	-6	-4	-2
-5	-6	8	4	0
4	1	-2	-1	-2
-2	-2	2	0	3
4	3	4	-3	1

Вправа №40

2	1	3	2	0
-1	2	0	1	-1
3	3	4	3	0
-3	-1	-2	0	-1
5	1	5	2	1

Вправа №41

1	0	2	1	1
4	-4	5	3	-1
5	-3	6	3	0
1	-1	2	2	1
-1	2	-1	-1	2

Вправа №42

3	2	-2	-1	0
-1	-3	3	2	2
-3	-2	4	2	0
6	2	-4	-1	2
5	4	-5	-3	-1

Вправа №43

$$\begin{pmatrix} 8 & -5 & 7 & 4 & 1 \\ -7 & 6 & -6 & -3 & 0 \\ 7 & -3 & 6 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №44

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №45

$$\begin{pmatrix} 5 & -9 & 8 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -4 & 4 & 0 \\ 4 & -9 & 8 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №46

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 5 & 7 & 5 \\ 3 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -8 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №47

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & -7 & -4 & -1 \\ -2 & -6 & 4 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №48

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 6 & 2 & 8 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Вправа №49

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -8 & -6 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ -8 & -2 & 8 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №50

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & 6 & 1 & 6 \\ -9 & -4 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №51

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -7 & -4 & 7 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 8 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Вправа №52

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №53

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 7 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №54

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вправа №55}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 & 4 & -1 \\ -4 & -2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вправа №56}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -4 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вправа №57}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вправа №58}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 9 & 5 & -7 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 7 & 5 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & -3 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вправа №59}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вправа №60}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №61

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №62

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & -6 & 4 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 7 & -6 & 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №63

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & -4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №64

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & -5 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & -3 & 5 & 5 \\ 4 & 2 & -3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №65

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Вправа №66

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & -3 & 5 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & 5 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Вправа №67

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ -6 & -1 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №68

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №69

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 5 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Вправа №70

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & -4 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & -7 & -10 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №71

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №72

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №73

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №74

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №75

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №76

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №77

$$\begin{pmatrix} 8 & 7,5 & -4 & 3 \\ -7 & 2 & 5 & -2 \\ 9 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №78

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -7/4 & 7/4 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 7 & -11/4 & -41/4 & 17/4 \\ 12 & -11/2 & -33/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №79

$$\begin{pmatrix} 2 & 17/2 & -4 & 3 \\ -6 & 3/2 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №80

$$\begin{pmatrix} 6 & 7/2 & -4 & 4 \\ -2 & -3/2 & 3 & -8 \\ 3 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №81

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 2 & -3 \\ 5/2 & 1 & 0 \\ 2 & -3/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №82

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1 & 5/2 \\ 1 & 3 & 7/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №83

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №84

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -6 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №85

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 7/2 & 11/2 \\ -1 & 0 & 9/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №86

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Вправа №87

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №88

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №89

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ -3 & 11 & -10 & -15 \end{pmatrix}$$

Вправа №90

$$\begin{pmatrix} 8/3 & 1 & -8/3 & 4/3 \\ 4/3 & 3 & -10/3 & 5/3 \\ 2/3 & 1 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №91

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & -3 \\ 1/2 & 5/2 & 0 & -3/2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3/2 & -3/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №92

$$\begin{pmatrix} -5/4 & -3/4 & 1/2 & 3 \\ -5/4 & 5/4 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -7/2 & -1/2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Вправа №93

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3/2 & -1 \\ 2 & 1 & 1/2 & -1 \\ -1 & -1/2 & -1/4 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №94

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 3 & -1/2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №95

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №96

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3/2 & 0 \\ -5/2 & 9/2 & 7/4 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №97

$$\begin{pmatrix} -1/9 & 17/9 & 1/3 & -5/9 \\ -1/3 & 5/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1/9 & 8/9 & -2/3 & 13/9 \end{pmatrix}$$

Вправа №98

2	1	0	4	3	0
3	-1	-3	0	6	1
-1	5	6	6	-3	-1
0	-2	-2	2	6	1
2	3	1	-2	-9	-2
1	2	1	2	-3	-1

Вправа №99

3	-1	-3	2	3	0
2	1	3	-4	6	-4
2	3	1	1	6	20
-1	5	2	3	3	4
7	-2	1	-3	5	-2
2	0	1	2	-4	1

Вправа №100

2	4	2	2	4	0
5	4	-3	0	5	-3
-6	3	9	3	2	3
-3	-2	0	1	6	-6
1	0	-1	1	4	-3
1	2	2	1	-1	3

Вправа №101

3	4	4	1	3	1
-2	3	3	-2	-1	-2
9	2	0	6	8	6
-4	-1	8	0	-2	-6
-2	1	6	-1	-1	-4
4	2	-1	1	3	3

Вправа №102

5	3	0	3	4	1
1	1	4	0	1	-3
8	3	-7	4	7	7
-6	-4	8	-6	1	-8
-2	-1	5	-2	1	-5
5	3	-4	4	2	4

Знаходження оберненої матриці.

Для знаходження оберненої матриці можна скористуватися тією властивістю, що елементарні перетворення, які приводять невироджену матрицю до одиничної, приводять також одиничну матрицю до матриці, яка є оберненою до даної. Працюючи у режимі паралельної роботи, виконуючи одночасно елементарні перетворення над двома матрицями, вихідною і одиничною, ви отримаєте з одиничної обернену матрицю.

Приклад. Побудувати обернену матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок.

За допомогою елементарних перетворень, (див. Обчислення рангу матриці, Обчислення визначника матриці), приведемо вихідну матрицю до одиничної, а одинична одночасно стане оберненою.

Продемонструємо процес перетворень на прикладі таблиці.

Крок	Дія	Результат	вихідна одинична
		$\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$	
Рядок 2=рядок 1*-3+рядок 2; Рядок 3=рядок 1*-2+рядок 3;		$\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$	
Рядок 2=рядок 2*2-1/4; Рядок 3=рядок 3*-1/3		$\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/4 & 3/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array} \right)$	

$$\begin{array}{l} \text{Рядок 1}=\text{рядок 3}^*-2+\text{рядок1}; \\ \text{Рядок 2}=\text{рядок3}^*-5/4+\text{рядок2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/12 & -1/4 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array} \right)$$

$$\text{Рядок 1}=\text{рядок2}^*-1+\text{рядок1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/12 & -1/4 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array} \right)$$

Матриця, яка отримана з одиничної є оберненою

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/12 & -1/4 & 5/12 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Для перевірки треба перемножити вихідну матрицю на обернену і отримати одиничну.

Вправи: №№ 836-837, 840-845, 857, 934-936. (И.В.Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре).

Тема "Обернені матриці"

Завдання: Знайти обернену матрицю

Вправа №1

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №3

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №7

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №8

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №9

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №10

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & -3 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №11

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №12

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №13

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №14

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №15

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №16

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №17

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 2 \\ -4 & -5 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №18

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №19

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №20

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №21

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №22

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №23

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Вправа №24

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №25

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Вправа №26

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №27

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №28

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №29

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -1 & -2 \\ 6 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №30

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №31

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №32

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №33

$$\begin{pmatrix} -6 & -5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №34

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №35

$$\begin{pmatrix} -4 & -5 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №36

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Вправа №37

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -8 & 5 \\ -1 & -1 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №38

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 6 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №39

$$\begin{pmatrix} -2 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №40

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 & -4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №41

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Вправа №42

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №43

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №44

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №45

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №46

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №47

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №48

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Вправа №49

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & -7 & -4 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №50

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №51

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3/2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №52

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 3 & -1/2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №53

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3/2 & 0 \\ -5/2 & 9/2 & 7/4 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №54

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1/2 \\ -1 & 3 & -1 & 1/2 \\ -1 & 1 & 1 & 1/2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №55

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ -10 & -6 & -6 & 13 \\ -8 & -6 & -6 & 13 \end{pmatrix}$$

Вправа №56

$$\begin{pmatrix} 8/3 & 1 & -8/3 & 4/3 \\ 4/3 & 3 & -10/3 & 5/3 \\ 2/3 & 1 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №57

$$\begin{pmatrix} 19/8 & 1/4 & -1/2 & 1/8 \\ 11/8 & 5/4 & -1/2 & 9/8 \\ 9/8 & -1/4 & 3/2 & 3/8 \\ 5/8 & -1/4 & 1/2 & 7/8 \end{pmatrix}$$

Вправа №58

$$\begin{pmatrix} -5/4 & -3/4 & 1/2 & 3 \\ -5/4 & 5/4 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -7/2 & -1/2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Вправа №59

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 4 & -1 & 4 \\ -6 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №60

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & -3 \\ 1/2 & 5/2 & 0 & -3/2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3/2 & -3/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №61

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 5/2 & 1/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №62

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & -1/3 & 2/3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №63

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3/2 & -1 \\ 2 & 1 & 1/2 & -1 \\ -1 & -1/2 & -1/4 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №64

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №65

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & 2 \\ 3/2 & -3 & 3 & 2 \\ 1/2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №66

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5/2 & 3 & -1/2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №67

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №68

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1/2 \\ 2 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №69

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 2 & 1/2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №70

$$\begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 & 2 & -8/3 \\ 4/3 & -1/3 & 2 & -8/3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №71

$$\begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №72

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -3 & -1 & 4 \\ -3/4 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ -1/2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Вправа №73

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 5 & -4 \\ -3 & 7 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №74

$$\begin{pmatrix} -1/9 & 17/9 & 1/3 & -5/9 \\ -1/3 & 5/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1/9 & 8/9 & -2/3 & 13/9 \end{pmatrix}$$

Вправа №75

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -5/3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Вправа №76

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1/2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №77} \\ -8 & 6 & 6 & 4 \\ -8 & 7 & 5 & 3 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \\ -6 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №78} \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1/2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №79} \\ 5/4 & 7/8 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 11/4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5/4 & -1/8 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №80} \\ 2 & -5 & 9/2 & 1 \\ 3 & -6 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 5/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №81} \\ 1 & -1 & -1/2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/4 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №82} \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №83} \\ 3 & 4 & 4 & -14 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 2 & -10 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Вправа №84

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -4 & 9 & 6 & -4 \\ -3 & 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №85

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №86

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & 2 & -3 \\ -5 & 4 & 7 & -8 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №87

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 & -1/2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №88

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №89

$$\begin{pmatrix} 3 & -3/2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №90

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №91

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №92

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №93

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №94

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3/2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №95

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №96

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №97

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 8/3 & -4/3 \\ 0 & 4/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Вправа №98

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №99} \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №100} \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №101} \\ 3 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1 & 3/2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №102} \\ 3 & -1/2 & -1 \\ 2 & 5/2 & -3 \\ 1/2 & 5/4 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №103} \\ 4 & -6 & 1 \\ 2/3 & -3 & 1/2 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №104} \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №105} \\ -2 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №106} \\ 5 & -3 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №107} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №108} \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1/4 & 2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №109} \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №110} \\ -1/2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №111} \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №112} \\ 2 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & 3/2 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №113} \\ 4 & 5/2 & -4 \\ 2 & 4 & -4 \\ 3 & 7/2 & -4 \end{pmatrix}$$

Характеристичний многочлен лінійного оператора.

Многочлен $f(x) = |xE - A|$ називається характеристичним многочленом лінійного оператора ϕ , а рівняння $f(x) = 0$ називається характеристичним рівнянням лінійного оператора.

Для знаходження коефіцієнтів характеристичного многочлена вихідної матриці використовується метод інтерполяції. Він полягає в наступному: по відомих значеннях многочлена в вибраних точках визначають коефіцієнти цього многочлена. Характеристичний многочлен матриці A має вигляд $f(x) = (-x)^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_{n-1}x + c_n$, де n - порядок визначника.

Розглянемо побудову характеристичного многочлена для матриці порядку 6×6 . Візьмемо точки $2, 1, 1/2, -1/2, -1, -2$, в яких обчислимо значення визначника $|x_0E - A|$. Підставимо замість x_0 вибрані значення в рівняння $(-x_0)^6 + c_1x_0^5 + c_2x_0^4 + c_3x_0^3 + c_4x_0^2 + c_5x_0 + c_6 = 0$. Отримаємо систему лінійних рівнянь, яку в матричній формі можна записати так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/32 \\ 1 & -1/2 & 1/4 & -1/8 & 1/16 & -1/32 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_6 \\ c_5 \\ c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(2) - 64 \\ \det(1) - 1 \\ \det(1/2) - 1/64 \\ \det(-1/2) - 1/64 \\ \det(-1) - 1 \\ \det(-2) - 64 \end{pmatrix}$$

$$B * X = C$$

Визначник цієї системи не дорівнює нулю, отримана система має рішення. Обчислив матрицю B^{-1} і виконав множення $B^{-1} * C$, отримаємо вектор-стовпець, елементами якого будуть потрібні коефіцієнти характеристичного многочлена.

Ви можете вибрати за бажанням свої точки. В загальному випадку система лінійних рівнянь виглядає:

$$\begin{pmatrix} (x_1)^0 & (x_1)^1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^{n-1} \\ (x_2)^0 & (x_2)^1 & (x_2)^2 & \dots & (x_2)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n)^0 & (x_n)^1 & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^{n-1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ \dots \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(x_1) - (-x_1)^n \\ \det(x_2) - (-x_2)^n \\ \dots \\ \det(x_n) - (-x_n)^n \end{pmatrix}$$

де n - порядок визначника, а $\det(x_i) = |x_i E - A|, i = \overline{1, n}$

Для знаходження раціональних коренів многочлену використовується наступна теорема: якщо раціональне число є коренем многочлену з цілими коефіцієнтами, то його чисельник є дільником вільного члену, а знаменник - дільником коефіцієнту при найбільшому ступеню. Якщо многочлен має раціональні коефіцієнти, то перед тим як використовувати цю теорему треба многочлен помножити на найменший спільний дільник.

Приклад. Побудувати характеристичний многочлен і знайти його корені для матриці лінійного оператора

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Розв'язок.

Для визначення коефіцієнтів характеристичного многочлену, розв'яжемо систему лінійних рівнянь. Вихідна матриця має порядок 4×4 , тому візьмемо точки 2, 1, $1/2$, $-1/2$. Для кожного

значення обчислимо $(-x_0)^4 + c_1 x_0^3 + c_2 x_0^2 + c_3 x_0 + c_4 = 0$. В матричній формі систему лінійних рівнянь можна записати так:

$$B \cdot X = C$$

(*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 1 & -1/2 & 1/4 & -1/8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(2) - 16 \\ \det(1) - 1 \\ \det(1/2) - 1/16 \\ \det(-1/2) - 1/16 \end{pmatrix}$$

де $\det(2) = |2 \cdot E - A|$, $\det(1) = |1 \cdot E - A|$, $\det(1/2) = |1/2 \cdot E - A|$,
 $\det(-1/2) = |-1/2 \cdot E - A|$.

Таким чином алгоритм побудови характеристичного многочлену такий:

- знайти обернену матрицю B^{-1} ;
- обчислити визначники $|2 \cdot E - A|$, $|1 \cdot E - A|$, $|1/2 \cdot E - A|$, $|-1/2 \cdot E - A|$;
- обчислити стовпець C ;
- перемножити B^{-1} на C - це буде стовпець потрібних коефіцієнтів.

Знайдемо матрицю B^{-1} (див. Знаходження оберненої матриці).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 1 & -1/2 & 1/4 & -1/8 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/15 & -2/3 & 4/3 & 4/15 \\ -1/15 & 1/3 & 2/3 & -14/15 \\ -4/15 & 8/3 & -10/3 & 14/15 \\ 4/15 & -4/3 & 4/3 & -4/15 \end{pmatrix}$$

Для обчислення визначника $|2 \cdot E - A|$, треба побудувати матрицю $(2 \cdot E - A)$. Отриману матрицю приведемо до діагонального або трикутного вигляду і перемножимо діагональні елементи - це буде визначник (див. Обчислення визначника матриці).

$$(2 \cdot E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ця матриця еквівалентна матриці
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
 тому

визначник $|2^*E-A|=2$. Але від нього треба ще відняти число 16 (це 2^4). Отриманий результат буде першим числом у вектору-стовпцю вільних членів системи лінійних рівнянь (*). У нашому прикладі отримали $2-16=-14$.

За такою ж технологією обчислимо $|1^*E-A|=1$, $|1/2^*E-A|=1/16$, $|1/2^*E-A|=1/16$.

$|1^*E-A|=1=0-1=-1$, $|1/2^*E-A|=1/16=-1/16-1/16=-1/8$,

$|1/2^*E-A|=1/16=27/16-1/16=13/8$.

Отримали стовпець вільних членів $C=$ системи лінійних рівнянь (*).

Помножимо B^{-1} на отриманий стовпець C .

$$B^{-1} * C = \begin{pmatrix} 1/15 & -2/3 & 4/3 & 4/15 \\ -1/15 & 1/3 & 2/3 & -14/15 \\ -4/15 & 8/3 & -10/3 & 14/15 \\ 4/15 & -4/3 & 4/3 & -4/15 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -14 \\ -1 \\ -1/8 \\ 13/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Отримали стовпець коефіцієнтів характеристичного многочлену.

$$X = \begin{pmatrix} c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, c_4=0, c_3=-1, c_2=3, c_1=-3.$$

Таким чином, характеристичний многочлен має вид $F(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$.

Знаходження власних значень лінійного оператора.

Власні значення лінійного оператора є коренями характеристичного многочлену. Знаходження раціональних коренів відбувається методом ділення даного многочлену на многочлен першого ступеню $(x-\alpha)$, де α - дільник вільного члену.

При діленні многочлена на многочлен скористуємося схемою Горнера.

Корені многочлену $F(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$ будемо шукати серед дільників коефіцієнту при змінній x . Дільники $\{1,-1\}$.

При $\alpha_1 = 1$ отримаємо схему Горнера:

	1	-3	3	-1
1	1	-2	1	0
1	1	-1	0	
1	1	0		

$\alpha_1 = 1$ корінь кратності 3.

Візьмемо наступний дільник -1 . При $\alpha_2 = -1$ отримаємо схему Горнера:

	1	-3	3	-1
-1	1	-4	7	-8

α_2 не є коренем многочлену.

Таким чином раціональними коренями будуть $\{0, 1$ кратності 3 $\}$.

Вправи №№ 1465-1474(И.В.Проскураков, Сборник задач по линейной алгебре).

Приклади матриць, які можна використовувати при розв'язку цієї задачі за вказаним алгоритмом.

B	B^{-1}
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/6 & -1/6 \\ 2/3 & -2/3 & -1/2 & 1/2 \\ -1/6 & -1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -1/6 & 1/6 & 1/12 & -1/12 \end{pmatrix} 65$

Тема "Характеристичний многочлен"

Завдання: Знайти характеристичний многочлен для матриці лінійного оператора.

Вправа №1

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -7 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & 6 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №3

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №4

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1,5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №5

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0,5 & 1 \\ -1,5 & -4 & -1 & -1,5 \\ 3,5 & 8 & 1,5 & 3,5 \\ 3,5 & 5 & -1 & 4,5 \end{pmatrix}$$

Вправа №6

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 & -6 \\ 9 & 7 & -6 & 9 \\ -18 & -10 & 14 & -18 \\ -15 & -6 & 12 & -14 \end{pmatrix}$$

Вправа №7

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \\ 1 & 14 & 5 & 1 \\ 2 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №8

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & -6 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №9

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -4 & 1 \\ -4 & 8 & 8 & -2 \\ -4 & 6 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №10

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 0 \\ -6 & -7 & 0 & -2 \\ 12 & 12 & -1 & 4 \\ 10 & 6 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Вправа №11

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ -2 & 7 & 1 & 5 \\ -4 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №12

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -7 \\ 3 & 2 & -6 & 9 \\ -6 & -2 & 13 & -18 \\ -7 & -3 & 10 & -14 \end{pmatrix}$$

Вправа №13

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 \\ 2,5 & 1 & 2,5 & 0,5 \\ -2,5 & -1 & 1,5 & 1,5 \\ 9,5 & 3 & 6,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Вправа №14

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & -9 & 3 & 4 \\ 4 & 11 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 8 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -19 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -21 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2,5 & -4,5 & 1 & 1 \\ 0,5 & -1 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 6,5 & -0,5 & -2,5 \\ 1 & -12,5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & -13 & 4 & 6 \\ 7 & 13 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -10 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & -17 & 7 & 9 \\ 5 & 11 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1,5 & 1,5 \\ -3 & -18 & 6,5 & 7,5 \\ 5 & 8 & -1,5 & -2,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №22

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №23

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №24

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №25

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №26

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №27

$$\begin{pmatrix} 1,5 & 2 & -1 & 1,5 & 2 \\ 1 & -0,5 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №28

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №29

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №30

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №31

$$\begin{pmatrix} 4 & -1,5 & -6 \\ -4 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №32

$$\begin{pmatrix} 2 & -1,5 & -4 \\ -2 & 6 & 12 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Вправа №33

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0,5 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №34

$$\begin{pmatrix} 5 & 2,5 & 2 \\ -4 & -12 & -24 \\ 2 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Вправа №35

$$\begin{pmatrix} 4 & 0,5 & -2 \\ -4 & -8 & -14 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Вправа №36

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0,5 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №37

$$\begin{pmatrix} -1 & 1,5 & 6 \\ 4 & 0 & -8 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Вправа №38

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №39

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -0,5 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №40

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1,5 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №41

$$\begin{pmatrix} -10 & 3,5 & 18 \\ 16 & 4 & -8 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Вправа №42

$$\begin{pmatrix} -4 & 1,5 & 7 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №43

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №44

$$\begin{pmatrix} -7 & -1,5 & 2 \\ 10 & 9 & 12 \\ -5 & -3,5 & -4 \end{pmatrix}$$

Вправа №45

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 8 \\ 8 & -1 & -8 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №46} \\ 3 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №47} \\ -5 & 12 & 36 \\ -8 & -7 & -16 \\ 1 & 5,5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №48} \\ -1 & 0,5 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & -0,5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №49} \\ 4 & -6 & -20 \\ -8 & 2 & 16 \\ 3 & -1,5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №50} \\ 10 & -1,5 & -12 \\ -12 & -5 & 0 \\ 6 & 1,5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №51} \\ -3 & 1,5 & 7 \\ 4 & -1 & -8 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №52} \\ 0 & 2,5 & 7 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №53} \\ 14 & 2,5 & -6 \\ -24 & -15 & -12 \\ 12 & 5,5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №62} \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №54} \\ -17 & 4,5 & 22 \\ 36 & 4 & -8 \\ -16 & 0,5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №55} \\ 4 & -0,5 & -1 \\ -10 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №56} \\ 0 & 0,5 & 1 \\ -6 & 0 & 2 \\ 5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №57} \\ -1 & -1 & 0 \\ -8 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №58} \\ 4 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 12 & -2,5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №59} \\ 5 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & -3,5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №60} \\ 7 & -2 & -3 \\ 8 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №61} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №63

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №64

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №65

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №66

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №67

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №68

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №69

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №70} \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №71} \\ 4 & -6 & -2 \\ 5 & -7 & -2 \\ -2 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №72} \\ -5 & -2 & -6 \\ -6 & -2 & -7 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №73} \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №74} \\ -2 & 9 & -5 \\ -9 & 20 & -9 \\ -17 & 33 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №75} \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №76} \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №77} \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №78} \\ -5 & 9 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 9 & -15 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №79} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №80} \\ 6 & -15 & 7 \\ 3 & -9 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №81} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №82} \\ 5 & -5 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \\ 5 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №83} \\ -10 & -12 & 5 \\ 8 & 11 & -6 \\ 9 & 16 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №84} \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №85} \\ -3 & -6 & 2 \\ 5 & 9 & -3 \\ 6 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №86} \\ 3 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №87} \\ -2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №88} \\ 6 & 8 & -5 \\ -3 & -6 & 6 \\ -3 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №89} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №90} \\ 4 & 6 & -4 \\ -2 & -9 & 8 \\ -3 & -14 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №91} \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & 9 & -8 \\ 7 & 16 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №92} \\ 0 & -2 & 1 \\ 7 & 7 & -2 \\ 10 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №93} \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №94} \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №95} \\ -1 & -3 & 2 \\ 4 & 8 & -5 \\ 5 & 11 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №96} \\ 1 & -4 & 3 \\ -6 & 7 & -6 \\ -9 & 13 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №97} \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №98} \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №99} \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №100} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

Власні вектори лінійного оператора.

Для знаходження власного значення лінійного оператора необхідно розв'язати характеристичне рівняння $|xE-A|=0$, де E - одинична матриця, A - матриця даного оператора.

Для обчислення власного вектора лінійного оператора, відповідного знайденому власному значенню, треба розв'язати рівняння $Ax=sx$, яке можна записати наступним образом $(A-sE)x=0$, де A - матриця лінійного оператора, s - власне значення. Це рівняння рівносильне системі лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} (a_{11} - s)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - s)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - s)x_n = 0 \end{cases}$$

Так як ранг матриці $A-sE$ менше ніж n , то система має ненульовий розв'язок. Фактично, достатньо знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь.

Приклад. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Розв'язок.

Алгоритм рішення:

- скласти характеристичне рівняння лінійного оператора;
- знайти корені характеристичного рівняння - це будуть власні значення лінійного оператора (див. тему Характеристичний многочлен лінійного оператора);
- для кожного власного значення знайти координати власних векторів цього оператора, які належать власному значенню;
- розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь (див. Рішення систем лінійних рівнянь).

В задачі навмисно взята матриця, для якої побудовано характеристичний многочлен і знайдені власні значення у розділі “Характеристичний многочлен лінійного оператора”.

$F(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$. Раціональні корені – $\{0, 1$ кратності 3 $\}$.

Для власного значення 0 складемо систему лінійних однорідних рівнянь. $(A-0 \cdot E)=0$.

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 2x_4 = 0 \\ 0x_1 - 1x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \\ 0x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 0x_1 - 1x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Знайдемо фундаментальну систему рішень. (див. Рішення систем лінійних рівнянь). Часне рішення – це вектор $(0, 0, 0, 0)$, фундаментальне рішення – $(1, 0, 1, 1)$.

По аналогії будуємо систему для власного значення 1 і знаходимо фундаментальну систему рішень. $(A-1 \cdot E)=0$

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 2x_4 = 0 \\ 0x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \\ 0x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 0x_1 - 1x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Часне рішення – це вектор $(0, 0, 0, 0)$, фундаментальне рішення – $(0, 0, 0, 1)$.

Власні вектори, які належать власному значенню 0 – $(1, 0, 1, 1)$, власному значенню 1 – $(0, 0, 0, 1)$.

Вправи №№ 1465-1474(И.В.Проскураков, Сборник задач по линейной алгебре).

Тема "Власні значення та власні вектори"

Завдання: Знайти власні значення та власні вектори для матриці лінійного оператора

Вправа №1

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №3

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 6 \\ 4 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Вправа №4

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №5

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №6

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №7

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №8

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №9

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №10

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №11

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №12

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ -6 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №13

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №14

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №15

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №16

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №17} \\ -2 & -2 & 6 \\ -4 & -2 & 8 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №18} \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №19} \\ -1 & -1 & -1 \\ -16 & -16 & -16 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №20} \\ -1 & 5/2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №21} \\ 3 & 1/2 & -1 \\ -2 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №22} \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №23} \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №24} \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -5/4 & 1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №25} \\ -2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №26} \\ 2 & 1/2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №27} \\ -4 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №28} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №29} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №30} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №31} \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №32} \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №33} \\ 2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №34} \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №35} \\ 1/2 & 3/2 & -1/4 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №36} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1/4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №37} \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №38} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №39} \\ 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №40} \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №41} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №42} \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №43} \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3/2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №44} \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №45} \\ -1/2 & 1/2 & 3/4 \\ -3 & 3 & 1/2 \\ -1 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №46} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №47} \\ 1 & 1 & -3/2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №48} \\ 1 & 2 & -2 \\ 1/2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №49} \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №50} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №51} \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №52} \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №53} \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №54} \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №55} \\ -2 & -4 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \\ -3 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №56} \\ -2/3 & 2 & -2/3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -4/3 & 1 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №57} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №58} \\ 0 & 1/2 & 1 \\ -2 & 5/2 & 1 \\ -1 & 3/4 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №59} \\ 2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №60} \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №61} \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №62} \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №63} \\ 5 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №64} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №65} \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №66} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5/2 & -1 \\ -1/2 & 3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №67} \\ 6 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №68} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №69} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №70} \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1/2 \\ -1 & 2 & 1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -12 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -5 \\ -4 & 2 & 6 & -8 \\ -4 & 2 & 8 & -10 \\ -2 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3/2 & 5 & -3 & 1/4 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 12 & 8 & -4 \\ -5 & 10 & 6 & -3 \\ 4 & -8 & -6 & 4 \\ 4 & -8 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №89

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №90

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 & 1 \\ -14 & 4 & -7 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №91

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 1 \\ -11 & -1 & 9 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №92

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №93

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ -1/2 & 3 & -3/2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №94

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №95

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №96} \\ 4 & 4 & -2 & -3 \\ 8 & 6 & -4 & -6 \\ 13 & 9 & -4 & -11 \\ 6 & 6 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №97} \\ 4 & -8 & -4 & 8 \\ 3/2 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \\ 3/2 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №98} \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №99} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №100} \\ -10 & -4 & 14 & -6 \\ 3 & 4 & -4 & 2 \\ -8 & -2 & 11 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №101} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №102} \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -8 & 5 & 3 & -4 \\ -7 & 3 & 4 & -3 \\ -5 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №103

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №104

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 & -2 \\ 5/2 & 2 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & -6 & -2 \\ 1/2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Обчислення рангу матриці.

Щоб знайти ранг матриці треба привести її до ступінчатого виду, користуючись методом елементарних перетворень. Кількість ненульових рядків і дорівнює рангу матриці.

Приклад. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язок.

Помножимо перший рядок на «-2» і додамо до третього рядка, помноженого на «1». У результаті отримаємо еквівалентну матрицю

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} * -2 \\ \downarrow \\ * 1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Продовжуючи цей процес, обчислимо наступну матрицю, у якої рядок 3=рядок 2 *1+ рядок 3 *1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Так як максимальна кількість ненульових рядків матриці дорівнює 3, то ранг матриці також дорівнює 3.

Вправи. №№608-611, 619-622 (И.В.Проскураков, Сборник задач по линейной алгебре).

Тема "Ранг матриці"

Завдання: Знайти ранг матриці

Вправа №1

2	3	3	1	0	1
1	0	3	2	2	3
0	1	3	3	2	0
2	0	2	2	0	0
3	3	0	3	1	1
0	2	0	0	1	2

Вправа №2

1	1	1	0	1	0
3	1	3	0	0	1
1	3	2	2	3	1
2	1	1	0	3	2
1	0	3	1	3	2
3	1	2	3	1	2

Вправа №3

0	0	1	1	2	1
1	2	3	1	2	3
1	2	0	0	0	0
3	3	0	1	2	3
2	3	2	3	0	3
2	3	3	3	2	3

Вправа №4

1	2	3	3	1	1
1	3	0	1	0	3
2	5	1	2	1	6
1	2	1	1	1	3
1	2	3	3	2	1
1	1	1	1	3	2

Вправа №5

3	0	3	0	3	3
1	4	6	7	6	3
3	1	0	1	0	1
0	0	3	3	3	1
1	2	3	2	3	0
0	2	0	3	0	2

Вправа №6

2	1	1	0	3	2
1	2	1	2	2	2
-2	2	2	3	-3	-2
3	3	2	2	5	2
-4	1	1	3	-6	4
0	3	3	3	0	0

Вправа №7

0	3	2	0	1	2
3	3	1	2	2	0
3	0	-1	2	1	-2
0	1	3	2	1	3
2	0	3	0	0	0
2	2	9	4	2	6

Вправа №8

1	1	-2	1	3	1
3	2	1	2	3	1
2	1	3	1	0	0
3	1	3	3	3	0
0	-1	2	1	1	0
3	2	1	2	2	0

Вправа №9

2	0	2	0	3	3
1	3	3	1	1	3
3	0	1	-1	8	12
2	2	2	0	5	9
-1	-1	-3	-1	1	3
1	2	3	1	0	0

Вправа №10

1	-8	-7	-5	-6	-4
2	-6	-4	-4	-6	0
4	1	2	1	3	5
2	0	1	0	0	3
2	1	1	1	3	2
1	3	3	2	3	3

Вправа №11

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №12

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №13

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №14

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №15

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & -5 & 0 \\ -3 & 8 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & 20 & -1 & 24 & 8 \\ 5 & -2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №16

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 11 & 2 \\ -2 & -5 & -4 & 8 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Вправа №17

$$\begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 & -13 \\ 1 & 5 & -4 & 9 \\ -3 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №18

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -14 \\ 1 & 5 & 5 & -9 \\ -6 & 3 & 9 & 1 \\ 8 & 1 & 1 & -8 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №19

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 19 & 7 \\ 1 & 6 & 20 & 9 \\ 4 & 4 & 68 & 25 \\ 1 & 3 & 11 & 4 \\ 2 & 9 & 31 & 13 \end{pmatrix}$$

Вправа №20

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 & -9 \\ -9 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & -7 & -7 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Вправа №21

$$\begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №22

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 6 \\ -6 & 2 & 3 & 4 \\ -8 & -7 & 4 & 8 \\ 2 & 9 & -1 & -4 \\ 7 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №23

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №24

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ 5 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №25

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -8 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Вправа №26

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & -1 & 5 \\ 3 & 11 & 6 & -11 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №27

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 10 & 2 & 7 \\ -2 & -10 & 4 & 4 \\ 5 & 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №28

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & -7 & 2 \\ 4 & -5 & -12 & 3 \\ -2 & 5 & 10 & -3 \\ 4 & -3 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №29

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №30

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -9 & -4 \\ -2 & -1 & 11 & 8 \\ 3 & 5 & -10 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №31

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 9 & -1 \\ -7 & 11 & -12 & 6 \\ 4 & -7 & 8 & -3 \\ 3 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & 8 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №32

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 11 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №33

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & -3 \\ -7 & 1 & 8 & 3 \\ -8 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 12 & -1 \\ -3 & 17 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

Вправа №34

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №35

1	-6	4	0
-2	-3	3	-2
4	-1	-7	-7
-7	-3	5	-6
-5	0	2	-4

Вправа №36

4	-10	-12	4
4	-10	-14	-2
0	8	22	9
4	-2	9	10
2	3	16	11

Вправа №37

2	-1	-3	-3
3	1	-2	3
0	2	1	3
2	3	1	9
1	1	0	3

Вправа №38

2	6	-4	2
1	3	5	8
2	8	-4	4
3	5	-9	-4
2	-6	-10	-16

Вправа №39

1	2	3	-1
3	2	1	1
3	4	9	-4
1	0	-5	4
2	2	-2	3

Вправа №40

2	3	1	-1
7	-3	-2	18
-1	0	-3	1
2	2	-2	3
5	5	2	1

Вправа №41

1	3	1	0
2	-1	3	2
4	5	5	2
1	3	1	0
6	4	8	4

Вправа №42

2	1	3	-1
-5	-5	-10	4
3	4	7	-3
4	7	11	-5
-1	-3	-4	2

Вправа №43

2	1	-1	3
5	2	3	4
3	1	4	1
4	2	-2	6
1	0	5	-2

Вправа №44

2	3	-1	5
1	2	1	3
3	4	-3	7
3	5	0	8
4	7	1	11

Вправа №45

1	2	1	3
4	3	2	5
-2	1	0	1
3	1	1	2
3	6	3	9

Вправа №46

1	4	3	2
2	5	1	3
0	3	5	1
-1	-1	2	-1
3	9	4	5

Вправа №47

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №48

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -11 & -18 \\ 1 & 2 & -3 & -8 & 4 \\ 0 & 7 & 25 & 6 & 19 \\ 4 & 13 & 29 & 7 & 18 \end{pmatrix}$$

Вправа №49

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №50

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №51

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & -1 & 5 \\ 6 & -4 & 4 & -6 & 2 \\ 3 & -7 & -1 & -4 & -10 \\ -5 & 5 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №52

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 13 & 4 & 6 & 7 & 3 \\ 18 & 3 & 7 & 11 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & -2 & -31 \end{pmatrix}$$

Вправа №53

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №54

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №55

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 5 & 0 & 2 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Вправа №56

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & -7 & 17 \\ 4 & 0 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -5 & 8 \\ 3 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №57

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №58

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Вправа №59

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & -1 & -5 & -9 \\ 1 & 7 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & -8 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №60

$$\begin{pmatrix} 1 & -13 & -5 & 11 & -1 \\ 7 & 6 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -8 & -7 & 8 & 3 \\ -8 & -3 & 8 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

Вправа №61

$$\begin{pmatrix} -1 & 9 & 11 & 13 & -7 \\ 4 & -3 & 8 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & -8 & -4 & 1 \\ -7 & 8 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

Вправа №62

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -2 & 6 \\ 3 & -2 & -3 & 3 & -7 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Вправа №63

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Вправа №64

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -5 & -3 & -8 \\ -2 & 3 & -3 & -2 & -5 \\ -2 & 4 & -5 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

Вправа №65

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -5 & 8 \\ 5 & 13 & 4 & 3 & 14 \\ -3 & -6 & -3 & 1 & -11 \end{pmatrix}$$

Вправа №66

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 9 & 8 \\ 2 & -3 & 14 & 6 & 11 \\ 2 & -4 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №67

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ -1 & -7 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & -4 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №68} \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -4 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №69} \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & -7 & -5 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №70} \\ -3 & 4 & 2 & -12 & 11 \\ -2 & 2 & -5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 12 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -7 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №71} \\ 3 & 4 & 5 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 8 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №72} \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 8 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -6 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №73} \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -7 & 7 & 4 & 8 \\ 7 & -4 & 10 & 4 & 5 \\ -3 & -9 & 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №74} \\ 2 & 6 & -4 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & -8 & 15 & 10 \\ 5 & -6 & 11 & -22 & -14 \\ -2 & 1 & -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №75

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №76

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 & -4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

Вправа №77

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & -8 \\ 4 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №78

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 6 & 2 \\ 4 & -8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №79

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Вправа №80

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -7 & 7 \\ -3 & -4 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Вправа №81

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 & 2 \\ 1 & -8 & 10 & 3 \\ 4 & -7 & 14 & 5 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 4 & 5 \\ -1 & 12 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -9 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & -5 & -2 \\ 2 & -19 & -3 & -4 \\ 4 & -8 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 & 3 \\ 5 & -5 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ -2 & 9 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Вправа №89

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & -9 \\ 4 & -1 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №90

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 3 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Вправа №91

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & -8 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & -6 \\ 5 & 5 & -9 & -13 \end{pmatrix}$$

Вправа №92

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Вправа №93

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №94

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -18 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №95

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 & 2 \\ 1 & -8 & 10 & 3 \\ 4 & -7 & 14 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 & 2 \\ 1 & -8 & 10 & 3 \\ 4 & -7 & 14 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 6 \\ 5 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -4 & -2 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

Побудова жорданової форми матриці.

Для побудови жорданової матриці необхідно:

- побудувати характеристичний многочлен матриці A ;
- знайти корені характеристичного многочлену - власні значення матриці A ;
- побудувати жорданові клітини для кожного власного значення за таким алгоритмом. Фіксуємо яке-небудь власне значення q , далі обчислимо ранги наступних матриць: $\text{rang}(A-qE)=r_1$, $\text{rang}(A-qE)^2=r_2, \dots$, $\text{rang}(A-qE)^i=r_i$, доки $r_i=r_{i-1}$. Обчислимо значення m_k : $m_1=n-r_1, \dots, m_k=n-r_k-(m_1+\dots+m_{k-1})$ - для k від 2 до i . Якщо значення m_k знайдені, то m_1 - число жорданових клітин, відповідних власному значенню q , m_1-m_2 - число жорданових клітин порядку 1, m_2-m_3 - число жорданових клітин порядку 2, ..., $m_{k-1}-m_k$ - число жорданових клітин порядку $k-1$, де k змінюється від 2 до i .

Жорданові клітини будуються за схемою: (приклад)

клітка порядку 1	клітка порядку 2	клітка порядку 3	клітка порядку 4
(q)	$\begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} q & 1 & 0 \\ 0 & q & 1 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} q & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$

Далі фіксується наступне власне значення і повторюється цей алгоритм спочатку;

Знайдені жорданові клітини розставляються по діагоналі, другі місця заповнюються нулями.

Приклад. Побудувати жорданову форму матриці лінійного оператора

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

В задачі взята матриця, для якої побудовано характеристичний многочлен і знайдені власні значення у відповідному розділі.

Характеристичний многочлен - $F(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$. Власні значення - $\{0, 1\}$.

Почнемо будувати жорданові клітини.

Для першого власного значення - 0 побудуємо матрицю $A-0*E$ і знайдемо її ранг (див. Обчислення рангу матриці).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$(A-0*E)$ = ранг матриці дорівнює 3. ($r_1=3$).

Побудуємо матрицю $(A-0*E)^2$ і знайдемо її ранг. Отримаємо результат у вигляді: $(A-0*E)*(A-0*E)=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & -3 & 7 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ранг матриці дорівнює 3. ($r_2=3$).

Отримали, що $r_1=r_2=3$. Обчислимо $m_1=n-r_1=4-3=1$, $m_2=n-r_2-m_1=4-3-1=0$.

Кількість жорданових клітин, які відповідають власному значенню 0 дорівнює $m_1=1$, кількість жорданових клітин порядку 1 дорівнює $m_1-m_2=1-0=1$. Ця клітина має вигляд (0) .

Візьмемо друге власне значення - 1. Побудуємо матриці $A-1*E$, а також $(A-1*E)^2$ і знайдемо їх ранги.

$$(A-1*E)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

ранг матриці дорівнює 3. ($r_1=3$).

$$(A-1*E)*(A-1*E)= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ранг матриці дорівнює 3. ($r_2=2$).

Так як $r_1 \neq r_2$, то далі обчислимо матрицю $(A-1*E)^3$ і знайдемо її ранг.

$$(A-1*E)^3= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ранг матриці дорівнює 3. ($r_3=1$).

Отримали, що $r_3=1$ і $r_2 \neq r_3$, значить треба знаходити $(A-1*E)^4$ і ранг цієї матриці r_4 .

$$(A-1*E)^4= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг матриці дорівнює 3. ($r_4=1$).

Нарешті отримали, що $r_4=1$ і $r_3=r_4=1$.

Маємо $r_1=3$, $r_2=2$, $r_3=1$, $r_4=1$. Обчислимо:

- $m_1=n-r_1=4-3=1$,
- $m_2=n-r_2-m_1=4-2-1=1$,
- $m_3=n-r_3-m_1-m_2=4-1-1-1=1$,
- $m_4=n-r_4-m_1-m_2-m_3=4-1-1-1-1=0$.

Кількість жорданових клітин, які відповідають власному значенню 1 дорівнює $m_1=1$, кількість жорданових клітин порядку 1 дорівнює

$m_1 - m_2 = 1 - 1 = 0$, кількість жорданових клітин порядку 2 дорівнює
 $m_2 - m_3 = 1 - 1 = 0$, кількість жорданових клітин порядку 3 дорівнює

$m_3 - m_4 = 1 - 0 = 1$. Ця клітина має вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Жорданова форма матриці лінійного оператора має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вправи №№1090-1108 (И.В.Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре).

Тема "Жорданові форми"

Завдання: Побудувати жорданову форму матриці

Вправа №1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №4

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №6

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3/2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №7

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №8

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & -1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №9

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вправа №10} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вправа №11} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вправа №12} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вправа №13} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3/2 & -1/4 \\ -2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вправа №14} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вправа №15} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вправа №16} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вправа №17} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вправа №18} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №19

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 8 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №20

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №21

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -1/2 & 3 & -2 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №22

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ -2 & 1 & 5/2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №23

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №24

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №25

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -4 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №26

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №27

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №28} \\ 4 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №29} \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №30} \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №31} \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №32} \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №33} \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №34} \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №35} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №36} \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №37

$$\begin{pmatrix} 2 & 2/3 & -4/3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №38

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №39

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №40

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №41

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №42

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №43

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №44

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №45

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №46

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №47

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №48

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №49

$$\begin{pmatrix} 8/3 & 0 & -4/3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Вправа №50

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №51

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №52

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №53

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №54

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №55} \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №56} \\ 5/2 & 0 & -1/2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №57} \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №58} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №59} \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №60} \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №61} \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №62} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №63} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 4 \\ -5/2 & 1/2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1/2 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 3 & 1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №73

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №74

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -7/4 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №75

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №76

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №77

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №78

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №79

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №80

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1/2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №81

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №82

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №83

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №84

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №85

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №86

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 1/2 \\ 1 & 0 & -2 & 1/2 \\ -3/2 & 1/2 & 3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №87

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 3/2 & -1/2 & 3 & -3/2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №88

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №89

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №90

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 0 \\ -5/2 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №91

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №92

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -7 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & 6 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №93

$$\begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 4 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -4 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3/2 & -4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №94

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №95

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №96} \\ 4 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 9 & 2 & -6 & 2 \\ 6 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №97} \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №98} \\ 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №99} \\ -2 & -2 & 0 & 4 \\ -4 & -4 & 0 & 8 \\ -4 & -6 & 2 & 8 \\ -4 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №100} \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №101} \\ -1 & -4 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Побудова ортогонального базису системи векторів.

Процесом ортогоналізації називається перехід від системи векторів $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$ до системи $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_n\}$, яка побудована наступним образом:

$$\bar{b}_1 = \bar{a}_1;$$

$$\bar{b}_k = \bar{a}_k - (c_1 * \bar{b}_1 + c_2 * \bar{b}_2 + \dots + c_{k-1} * \bar{b}_{k-1}) \text{ при } k=1,2,\dots,n, \text{ де}$$

$c_i = (\bar{a}_k, \bar{b}_i) / (\bar{b}_i, \bar{b}_i)$ при $i=1,2,\dots,k-1$, якщо $\bar{b}_i \neq 0$ і c_i - довільне число, якщо $\bar{b}_i = 0$.

Приклад. Побудуйте ортогональний базис, який натягнутий на систему векторів

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Користуючись схемою, яка вище описана, маємо:

- $\bar{a}_1 = \{1,2,1,2\}$, $\bar{b}_1 = \{1,2,1,2\}$;
- $\bar{a}_2 = \{2,3,0,2\}$, $\bar{b}_2 = \bar{a}_2 - c_1 * \bar{b}_1$, $c_1 = (\bar{a}_2, \bar{b}_1) / (\bar{b}_1, \bar{b}_1)$
- $\bar{a}_3 = \{2,1,1,3\}$, $\bar{b}_3 = \bar{a}_3 - c_1 * \bar{b}_1 - c_2 * \bar{b}_2$,
 $c_1 = (\bar{a}_3, \bar{b}_1) / (\bar{b}_1, \bar{b}_1)$, $c_2 = (\bar{a}_3, \bar{b}_2) / (\bar{b}_2, \bar{b}_2)$

Щоб виконати ці обчислення Ви можете застосувати обчислення скалярного добутку векторів, їх додавання і віднімання.

Обчислимо вектор \bar{b}_2 . Утворимо матрицю, в якій перший рядок - це вектор $\bar{b}_1 = \bar{a}_1$, другий - \bar{a}_2 , у третьому запишемо добуток відповідних елементів перших двох рядків. Додамо отримані числа - це буде (\bar{a}_2, \bar{b}_1) .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{a}_2, \bar{b}_1) = 2 + 6 + 0 + 4 = 12.$$

Аналогічно обчислимо (\bar{b}_1, \bar{b}_1) .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{b}_1, \bar{b}_1) = 1 + 4 + 1 + 4 = 10, c_1 = 12/10 = 6/5.$$

За формулою $\bar{b}_2 = \bar{a}_2 - c_1 * \bar{b}_1$, знайдемо цей вектор.

Перший рядок - це вектор \bar{a}_2 , другий - $c_1 * \bar{b}_1$, у третьому запишемо різницю відповідних елементів перших двох рядків. Це будуть коефіцієнти вектора \bar{b}_2 . $\bar{b}_2 = \{4/5, 3/5, -6/5, -2/5\}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 6/5 & 12/5 & 6/5 & 12/5 \\ 4/5 & 3/5 & -6/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

За аналогією обчислюється вектор \bar{b}_3 . $c_1 = (\bar{a}_2, \bar{b}_1) / (\bar{b}_1, \bar{b}_1) = 11/10$,

$c_2 = (\bar{a}_3, \bar{b}_2) / (\bar{b}_2, \bar{b}_2) = -1/13$, $\bar{b}_3 = \bar{a}_3 - c_1 * \bar{b}_1 - c_2 * \bar{b}_2 = \{25/26, -15/13, -5/26, 10/13\}$.

Отриманий результат можна записати у вигляді:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4/5 & 3/5 & -6/5 & -2/5 \\ 25/26 & -15/13 & -5/26 & 10/13 \end{pmatrix}, \text{ де перший рядок - } \bar{b}_1, \text{ другий - } \bar{b}_2,$$

третій- \bar{b}_3 .

Щоб перевірити, дійсно цей базис є ортогональним, можна попарно перемножити вектори цього базису.

Наприклад: $\bar{b}_1 * \bar{b}_2 = (1, 2, 1, 2) * (4/5, 3/5, -6/5, -2/5) = 1 * 4/5 + 2 * 3/5 - 6/5 - 4/5 = 0$.

Вправи №№1357-1363 (И.В.Проскураков, Сборник задач по линейной алгебре).

Тема "Ортогоналізація систем векторів"

Завдання: Побудувати ортогоналізований базис, натягнутий на систему векторів.

Вправа №1

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & -2 & -5 \\ -8 & 1 & 4 & 9 \\ -3 & -1 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

Вправа №2

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & -7 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 11 \\ -3 & 7 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

Вправа №3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Вправа №4

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №7

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \\ 6 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & -2 & -5 \\ 1 & 8 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

Вправа №9

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & -2 \\ -6 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Вправа №10

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №11

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №12

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 8 & 6 & -3 & 1 \\ 9 & -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Вправа №13

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 & 5 \\ -3 & 6 & 8 & -1 \\ 8 & -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Вправа №14

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & -3 \\ 7 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №23

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №24

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 7 \\ -10 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Вправа №25

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 11 \\ 0 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №26

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №27

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 10 & 7 & 14 \\ -6 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Вправа №28

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 7 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Вправа №29

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 8 & -2 \\ 10 & -5 & -9 \end{pmatrix}$$

Вправа №30

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №31

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 11 & 9 & 0 \\ 14 & -6 & -6,5 \end{pmatrix}$$

Вправа №32

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -5 & -5 & 14 \\ 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Вправа №33

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 10 & 5 & 19 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №34

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 9 & 10 & 10 \\ 9 & 2,5 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №35

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 8 & 8 & -1 \\ -1 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

Вправа №36

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Вправа №37

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 9 & -7 & 13 \end{pmatrix}$$

Вправа №38

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №39

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 11 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Вправа №40

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Вправа №42

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ -5 & 1 & -7 \\ -9 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Вправа №43

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ -5 & -19 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №44

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Вправа №45

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 9 & 5,5 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №46

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & -8 \end{pmatrix}$$

Вправа №47

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 16 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Вправа №48

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №49

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №50} \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №51} \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \\ -11 & -2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №52} \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №53} \\ 4 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №54} \\ -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №55} \\ 1 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №56} \\ 2 & -1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №57} \\ -3 & 4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №58} \\ 8 & -6 \\ -14 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №59} \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №60} \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №61} \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №62} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №63} \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №64} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №65} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №66} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №67

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №68

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №69

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №70

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №71

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №72

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №73

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №74

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №75} \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №76} \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №77} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №78} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №79} \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №80} \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №81} \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №82} \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №83} \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №84

1	1	3	3
0	2	3	2
1	0	3	1
2	1	0	3

Вправа №85

3	0	3	0
1	3	0	1
0	3	1	2
1	1	3	2

Вправа №86

0	3	1	0
0	3	1	3
2	2	1	2
2	0	2	0

Вправа №87

2	0	0	2
3	1	2	1
0	1	3	2
3	1	2	0

Вправа №88

2	0	1	3
2	2	0	2
2	2	2	3
2	1	3	3

Вправа №89

2	2	2	2
3	1	2	2
0	0	0	3
2	2	1	3

Вправа №90

0	3	0	2
0	2	1	3
0	1	3	2
3	0	1	0

Вправа №91

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №92

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №93

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №94

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №95

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №96

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №97

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №98

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №99

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №100

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №101

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №102

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №103

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №104} \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №105} \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №106} \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №107} \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №108} \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №109} \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №110} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №111} \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Вправа №112} \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №113

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Відповіді до завдань
Тема "Системи лінійних рівнянь"

№1

(1;0;2;-1;0)

№2

(2;1;-1;0;3)

№3

(-1;2;1;3;-1)

№4

(3;1;1;2;-2)

№5

(1;1;2;-1;2)

№6

(-1;3;0;2;1)

№7

часн. роз. (0;0;0;0;0)

фунд. роз. (0;0;1;-1;1)

№8

часн. роз. (0;0;0;0;0)

фунд. роз. (21;-7;-4;1;1)

№9

часн. роз. (0;0;0;0;0)

фунд. роз. (0;-2;0;1;0) (1;2;-1;0;1)

№10

часн. роз. (0;0;0;0;0)

фунд. роз. (1;-1/2;3/2;1/2;1)

№11

часн. роз. (0;0;0;0;0)

фунд. роз. (3;-1;0;2;1)

№12

часн. роз. (0;0;0;0;0)

фунд. роз. (-1;0;-3;-2;1)

№13

часн. роз. (0;0;0;0;0)

фунд. роз. (7;5;-5;-1;1)

№14

часн. роз. (0;0;0;0;0)

фунд. роз. $(1; -3/2; -1/2; 1; 0)$ $(-1; 1; 1; 0; 1)$
 №15
 часн. роз. $(0; 0; 0; 0; 0)$
 фунд. роз. $(5; -2; -1; 1; 0)$ $(-2; -1; 2; 0; 1)$
 №16
 часн. роз. $(0; 0; 0; 0; 0)$
 фунд. роз. $(-1; 1; 1; 0; 0)$ $(-3; -1; 0; 1; 0)$ $(-7; -2; 0; 0; 1)$
 №17
 часн. роз. $(0; 0; 0; 0; 0)$
 фунд. роз. $(-8; 4; -1; 1; 0)$ $(-9; 5; -2; 0; 1)$
 №18
 часн. роз. $(0; 0; 0; 0; 0)$
 фунд. роз. $(1/2; -2; 1/2; -2; 1)$
 №19
 часн. роз. $(0; 0; 0; 0; 0)$
 фунд. роз. $(1; -2; 2; -1; 1)$
 №20
 часн. роз. $(0; 0; 0; 0; 0)$
 фунд. роз. $(-2; -1; -1; 2; 1)$
 №21
 $(2; -1; 1; -1; 0)$
 фунд. роз.
 $(1; -1; 3; 0; 1)$
 №22
 $(2; 1; 1; -1; 0)$
 фунд. роз.
 $(1; -3; 2; 0; 1)$
 №23
 $(1; -1; 1; -1; 0)$
 фунд. роз.
 $(1; 2; -1; 0; 1)$
 №24
 $(-2; 1; 0; 0; 1)$
 фунд. роз.
 $(2; 0; -3; 1; 0)$
 №25
 $(1; -1; 1; 1; 0)$
 фунд. роз.
 $(0; 1; -2; 0; 1)$

№26	
(-1;2;1;0;0)	
фунд. роз.	(1;-1;0;1;0)
(2;1;0;0;1)	
№27	
(0;-2;1;0;0)	
фунд. роз.	(1;0;0;1;0)
(-1;1;0;0;1)	
№28	
часн. роз.	(1;2;-1;0;-2)
фунд. роз.	(2;-1;1;-2;1)
№29	
часн. роз.	(2;0;1;-1;0)
фунд. роз.	(1;-2;0;3;1)
№30	
часн. роз.	(1;1;-1;2;2)
фунд. роз.	(2;-1;-2;-1;1)
№31	
часн. роз.	(1;2;0;-1;1)
фунд. роз.	(1;2;-1;0;-1)
№32	
часн. роз.	(2;1;-1;0;1)
фунд. роз.	(0;2;-1;1;1)
№33	
часн. роз.	(3;1;-2;-1;2)
фунд. роз.	(2;0;-1;-1;1)
№34	
часн. роз.	(1;0;2;-1;1)
фунд. роз.	(1;0;1;-1;0)
№35	
часн. роз.	(2;1;1;-1;-2)
фунд. роз.	(0;2;-2;1;0)
№36	
часн. роз.	(2;0;0;1;-1)
фунд. роз.	(1;-1;0;1;0)
№37	
часн. роз.	(1;3;2;0;1)
фунд. роз.	(-1;2;1;1;0)
№38	

часн. роз.	$(-1;2;1;-1;2)$
фунд. роз.	$(0;1;-1;1;0)$
№39	
часн. роз.	$(0;1;2;2;0)$
фунд. роз.	$(-1;1;1;1;0)$
$(0;1;-2;0;1)$	
№40	
часн. роз.	$(1;2;3;-1;1)$
фунд. роз.	$(0;-1;1;1;0)$
$(2;1;1;0;1)$	
№41	
часн. роз.	$(1;2;0;2;1)$
фунд. роз.	$(-1;1;1;1;0)$
$(-1;0;1;0;1)$	
№42	
часн. роз.	$(2;-1;1;2;1)$
$(2;-1;1;0;0)$	
фунд. роз.	$(1;2;0;1;0)$
$(-1;2;0;0;1)$	
№43	
часн. роз.	$(0;1;2;-1;-2)$
$(1;1;1;0;0)$	
фунд. роз.	$(-1;2;0;1;0)$
$(2;-1;0;0;1)$	
№44	
часн. роз.	$(1;0;-1;2;1)$
$(2;1;1;0;0)$	
фунд. роз.	$(2;-1;0;1;0)$
$(-1;2;0;0;1)$	
№45	
фунд. роз.	$(1;-2;2;1)$
№46	
фунд. роз.	$(2;1;-2;-1)$
№47	
фунд. роз.	$(2;0;1;1)$
№48	
фунд. роз.	$(1;2;-1;1)$
№49	
фунд. роз.	$(1;-2;3;1)$

№50	
фунд. роз.	(3;-2;1;-1)
№51	
(1;-1;1;0)	
фунд. роз.	(-3;2;0;1)
№52	
фунд. роз.	(-1;2;1;0)
(2;1;0;1)	
№53	
фунд. роз.	(-1;1;1;0)
(1;-2;0;1)	
№54	
фунд. роз.	(1;-1;1;0)
(-2;1;0;1)	
№55	
часн. роз.	(1;0;1;-2)
фунд. роз.	(-1;1;-2;1)
№56	
часн. роз.	(2;1;3;-1)
фунд. роз.	(1;-2;0;1)
№57	
часн. роз.	(2;1;-1;1)
фунд. роз.	(-1;0;2;1)
№58	
часн. роз.	(1;2;-1;2)
фунд. роз.	(0;2;1;1)
№59	
часн. роз.	(1;3;-1;2)
фунд. роз.	(0;2;-1;1)
№60	
часн. роз.	(2;1;-2;0)
фунд. роз.	(1;-2;1;0)
(-2;-1;0;1)	
№61	
часн. роз.	(3;1;2;1)
фунд. роз.	(1;1;-1;0)
(1;2;0;1)	
№62	
часн. роз.	(1;-2;-1;3)

фунд. роз. $(1;-2;1;0)$
 $(2;-1;0;1)$

№63

часн. роз. $(3;2;-1;-2)$

фунд. роз. $(1;1;-1;0)$
 $(2;-1;0;1)$

№64

Система несумісна

№65

Система несумісна

№66

Система несумісна

№67

Система несумісна

№68

Система несумісна

№69

Система несумісна

№70

Система несумісна

№71

Система несумісна

№72

Система несумісна

№73

Система несумісна

№74

часн. роз. $(2;1;-1;0)$

фунд. роз. $(-1;2;-2;1)$

№75

часн. роз. $(-3;0;1;0;2)$

фунд. роз. $(2;1;1;0;0)$

$(1;0;1;1;2)$

№76

$(2;-1;3;1)$

№77

$(1;2;-2;4)$

№78

$(2;-1;2;1)$

№79
 (2;0;1;3)
 №80
 (-2;4;1;-1)
 №81
 (1;0;3;6)
 №82
 (3;2;-1;-2)
 №83
 (-2;1;2;3)
 №84
 (2;-1;3)
 №85
 (-2;-3;4)
 №86
 (1;-3;2)
 №87
 (3;1;-2)
 №88
 (-1;4;-3)
 №89
 (1;-3;5)
 №90
 (2;-5;1)
 №91
 часн. роз. (-1;2;2;1;0)
 фонд. роз. (2;-1;1;1;0)
 (1;0;1;0;1)
 №92
 часн. роз. (-1;-3;2;0;0)
 (1;1;-2;1;0)
 фонд. роз. (2;-1;0;0;1)
 №93
 часн. роз. (2;1;0;-1;0)
 фонд. роз. (-1;1;1;2;1)
 №94
 часн. роз. (2;0;1)
 фонд. роз. (-1;1;1)
 №95

часн. роз.	$(-1;3;0)$
фунд. роз.	$(1;2;1)$
№96	
часн. роз.	$(1;2;0)$
фунд. роз.	$(-2;3;1)$
№97	
$(3;1;-2)$	
№98	
$(0;0;0;0;0)$	
№99	
$(0;0;0;0)$	
№100	
$(0;0;0;0)$	
№101	
$(0;0;0)$	

Тема "Визначники"

№1 6 №2 -18 №3 4 №4 -9 №5 -10 №6 0 №7 10 №8 -52 №9 69 №10 -
32 №11 27 №12 2 №13 -72 №14 -24 №15 18 №16 21 №17 -8 №18 -10
№19 -1 №20 19 №21 -11 №22 -50 №23 48 №24 -1 №25 4 №26 -60
№27 6 №28 -12 №29 -14 №30 15 №31 -11 №32 9 №33 -3 №34 20
№35 0 №36 9 №37 6 №38 -6 №39 12 №40 1 №41 5 №42 2 №43 3
№44 4 №45 5 №46 10 №47 4 №48 -4 №49 12 №50 -2 №51 1 №52 4
№53 18 №54 6 №55 12 №56 9 №57 6 №58 8 №59 24 №60 30 №61 14
№62 40 №63 4 №64 12 №65 4 №66 4 №67 4 №68 6 №69 56 №70 4
№71 8 №72 1 №73 6 №74 -2 №75 3 №76 10 №77 2 №78 1/2 №79 3/2
№80 6 №81 3/2 №82 -13/4 №83 6 №84 8 №85 8 №86 24 №87 2 №88
2 №89 0 №90 8 №91 1 №92 8 №93 2 №94 4 №95 0 №96 2 №97 1
№98 -6 №99 10 №100 6 №101 -5 №102 2

Тема "Обернені матриці"

$$\begin{pmatrix} \text{№1} \\ 1/5 & 3/5 & 1 & -14/5 \\ 1/5 & 8/5 & 2 & -29/5 \\ -1/5 & 2/5 & 1 & -11/5 \\ 2/5 & 1/5 & 1 & 12/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№2} \\ 7 & -2 & -5 & 2 \\ -6 & 5 & 7 & -3 \\ -5 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№3} \\ -1/2 & 5/2 & 9/4 & -1/4 \\ -1/2 & 3/2 & 5/4 & -1/4 \\ 2 & -4 & -9/2 & 1/2 \\ -5/2 & 13/2 & 23/4 & -3/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№4} \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№5} \\ 2/3 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 5/3 & -2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№6} \\ -2 & 1/9 & 7/9 & 1/9 \\ 2 & 7/9 & -4/9 & 2/9 \\ 1 & 5/9 & 1/9 & 4/9 \\ 0 & 1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№7} \\ -2 & -2 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№8} \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 & -4 \\ -2 & -3 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№9} \begin{pmatrix} -5 & -1 & -3 & -2 \\ 11 & 3 & 8 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{№11} \begin{pmatrix} 6 & 10 & -7 & -6 \\ -2 & -9 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№12} \begin{pmatrix} 1/9 & -2/9 & 1/3 & 2/9 \\ -4/9 & -1/9 & 2/3 & 1/9 \\ 1/3 & 4/3 & -2 & -1/3 \\ -1/3 & 5/3 & -2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№13} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & -3 \\ 3 & -4 & 6 & 5 \\ 4 & -5 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{№14} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{№15} \\ \left(\begin{array}{cccc} 8 & 5 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№16} \\ \left(\begin{array}{cccc} 2 & -8 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№17} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -5 & -9 \\ 3 & -2 & -4 & -5 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№18} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№19} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & -10 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№20} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -7 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -8 & -6 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№21} \\ \left(\begin{array}{cccc} 6 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\text{№22} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{№23} \begin{pmatrix} -5 & 7 & -4 & -3 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№24} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№25} \begin{pmatrix} -3 & 10 & -5 & -2 \\ 1 & -6 & 3 & 1 \\ 4 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№26} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№27} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№28} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{№29} \\ \left(\begin{array}{cccc} -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№30} \\ \left(\begin{array}{cccc} 8 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№31} \\ \left(\begin{array}{cccc} -1 & -1 & -3 & -3 \\ -5 & -6 & -17 & -16 \\ 3 & 4 & 12 & 11 \\ -13 & -15 & -44 & -41 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№32} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -4 & 11 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№33} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№34} \\ \left(\begin{array}{cccc} -3 & -12 & 7 & 3 \\ 2 & 10 & -7 & -3 \\ 2 & 8 & -5 & -2 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№35} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -4 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\text{№36} \begin{pmatrix} -5 & -2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№37} \begin{pmatrix} 10 & 2 & -7 & -11 \\ 4 & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№38} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№39} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{№40} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№41} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & -3 & -5 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№42} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{№43} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№44} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 3 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№45} \\ \left(\begin{array}{ccccc} -9 & 3 & 2 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№46} \\ \left(\begin{array}{ccccc} -19/2 & 7/2 & 3/2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -5/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№47} \\ \left(\begin{array}{ccccc} -3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ -3 & 10/3 & 2 & -1/3 & 0 \\ 2 & -2/3 & 0 & -1/3 & 1 \\ -3 & 5/3 & 1 & 1/3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№48} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 15/4 & -5/2 & -5/4 & 0 & 3/4 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ -3/2 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 3/2 & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array} \right) \end{array}$$

№49

$$\begin{pmatrix} -9 & -14 & -6 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

№50

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

№51

$$\begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 & 1/2 & -1/8 \\ -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3/8 & 1/4 & 1/2 & 3/8 \end{pmatrix}$$

№52

Оберненої матриці не існує

№53

$$\begin{pmatrix} 7/4 & -9/4 & -11/8 & 3 \\ 5/2 & -9/2 & -9/4 & 6 \\ -1/2 & 3/2 & 5/4 & -2 \\ 2 & -4 & -3/2 & 5 \end{pmatrix}$$

№54

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -1 & 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & -1/4 \\ 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

№55

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 5/4 & 3/8 & -5/8 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3/2 & 3/2 & 5/4 & -7/4 \end{pmatrix}$$

№56

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/2 & 7/6 & -7/12 \\ -1/3 & 0 & 4/3 & -2/3 \\ -1/6 & -1/2 & 5/3 & -7/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№57} \\ 13/32 & -1/16 & 1/8 & -1/32 \\ -3/8 & 3/4 & 1/2 & -9/8 \\ -5/16 & 1/8 & 3/4 & -7/16 \\ -7/32 & 3/16 & -3/8 & 35/32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№58} \\ 3/2 & 1/2 & 0 & -1 \\ 9/16 & 15/16 & -1/8 & -1/2 \\ 7/32 & 1/32 & 9/16 & -1/4 \\ 17/16 & 7/16 & -1/8 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№59} \\ -3/2 & 1/4 & -1/2 & 7/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 1 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ -5/2 & 1/4 & 1 & 11/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№60} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -3/2 & 7/2 & -1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -5/2 & 11/2 & -2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№61} \\ -1/4 & -1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 5/16 & 5/16 & -1/8 & -3/16 \\ -9/8 & -1/8 & 5/4 & 7/8 \\ -5/16 & -5/16 & 1/8 & 19/16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№62} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1 & 1/6 & -1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№63} \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ -4 & -5/2 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & 5/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

№64

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & -1/4 \\ -1/2 & -1 & 2 & -1/4 \\ 0 & -1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

№65

$$\begin{pmatrix} -1/4 & 5/2 & -3/2 & -1 \\ -5/8 & 11/4 & -5/4 & -1 \\ -1/4 & 1 & 0 & -1/2 \\ -3/8 & 5/4 & -3/4 & 0 \end{pmatrix}$$

№66

$$\begin{pmatrix} 11/16 & 3/8 & -5/16 & 1/8 \\ -7/8 & 1/4 & 1/8 & 3/4 \\ -9/16 & -1/8 & 7/16 & 5/8 \\ -5/16 & 3/8 & -5/16 & 9/8 \end{pmatrix}$$

№67

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

№68

$$\begin{pmatrix} 5/8 & 1/16 & -3/8 & -9/32 \\ -1/2 & 1/4 & 1/2 & 3/8 \\ -5/4 & -1/8 & 5/4 & 17/16 \\ 1/2 & 1/4 & -1/2 & -1/8 \end{pmatrix}$$

№69

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

№70

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 & -1 & 5/3 \\ -4/3 & 7/3 & -1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{№71} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1/2 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & 0 & -1/2 \\ -1/4 & -1/4 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№72} \\ \left(\begin{array}{cccc} 9/8 & 5/4 & 1/4 & -3/2 \\ 5/16 & 9/8 & 1/8 & -3/4 \\ 1/8 & 1/4 & 3/4 & -1/2 \\ 3/8 & 3/4 & 1/4 & -1/2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№73} \\ \left(\begin{array}{cccc} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & -3/8 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№74} \\ \left(\begin{array}{cccc} 29/9 & -43/9 & 1/3 & 19/9 \\ 2/3 & -1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/9 & 1/9 & 2/3 & -4/9 \\ -1/9 & -1/9 & 1/3 & 4/9 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№75} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2/3 & -5/6 & 1/6 \\ -1 & 4/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№76} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1/2 & -1 & 3/2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1 & 5/2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№77} \\ \left(\begin{array}{cccc} 4 & -2 & -2 & -3/2 \\ 5/2 & -1 & -3/2 & -1 \\ 2 & -1 & -1/2 & -1 \\ 3/2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

№78

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ -7/2 & 4 & 9/4 & -5/2 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

№79

$$\begin{pmatrix} 15/16 & -11/32 & 1/8 & 0 \\ -1/8 & 5/16 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & -5/16 & 3/4 & 0 \\ -9/8 & 5/16 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

№80

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -3/2 & 1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

№81

$$\begin{pmatrix} 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ -3/4 & -1/10 & -4/5 & 11/10 \\ -1/2 & 3/5 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & -1/5 & -3/5 & 6/5 \end{pmatrix}$$

№82

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & -1/4 & -3/4 & 5/4 \\ -1/4 & -1/4 & 5/4 & -3/4 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

№83

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ -1 & -3/2 & 2 & 0 \\ -1/2 & -2 & 7/6 & 2/3 \\ -1/2 & -1 & 5/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

№84

$$\begin{pmatrix} 11/21 & 8/21 & -10/21 & -2/21 \\ 8/21 & 2/21 & -13/21 & 10/21 \\ -3/7 & 1/7 & 4/7 & -2/7 \\ -13/42 & 1/21 & -13/42 & 31/42 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{№85} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2/5 & -2 & -14/5 \\ 0 & 1/5 & 0 & -2/5 \\ 1 & 2/5 & -2 & -19/5 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№86} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1/2 & -1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & -1/2 & 5/4 \\ 1/2 & -1 & -1/2 & 3/2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№87} \\ \left(\begin{array}{ccc} 9/8 & -5/16 & 3/8 \\ 3/4 & 1/8 & 1/4 \\ 1/4 & -1/8 & 3/4 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№88} \\ \left(\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -5/4 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№89} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№90} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1/3 & 1/3 \\ -1/2 & 1/6 & 1/3 \\ -1/4 & 1/3 & 1/6 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№91} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & -4 & -3/4 \\ 1 & -5 & -3/4 \\ 0 & 2 & 1/2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№92} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3/2 \\ -1/2 & 2 & 9/4 \\ 1/2 & -1 & -3/4 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№93} \\ \left(\begin{array}{ccc} -2 & 3 & -3/2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№94} \\ 1/4 & 1/2 & -1/2 \\ -5/8 & 7/4 & -3/4 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№95} \\ 3/10 & -7/20 & 9/20 \\ -1/5 & -1/10 & 7/10 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№96} \\ 4/25 & -6/25 & -2/25 \\ 4/25 & 19/25 & -2/25 \\ 2/25 & -28/25 & 24/25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№97} \\ 0 & 1 & -2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1 & 2 & -5/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№98} \\ 0 & -1/2 & 1/4 \\ -2 & -1/2 & 7/4 \\ -1 & -1/2 & 5/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№99} \\ -5/6 & 1 & 8/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \\ -2/3 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№100} \\ 1/4 & 3/8 & -1/16 \\ -1/4 & 9/8 & -3/16 \\ -1/2 & 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№101} \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1/2 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№102} \\ 0 & 1 & -2 \\ -3/4 & 2 & -7/2 \\ -5/8 & 2 & -17/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{№103} \\ \left(\begin{array}{ccc} 3/8 & -3/4 & 0 \\ -1/8 & -3/4 & 1/4 \\ -5/4 & -3/2 & 3/2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№104} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1/10 & -1/5 & 1/5 \\ 4/5 & 2/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/10 & 2/5 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№105} \\ \left(\begin{array}{ccc} -1 & -5/2 & 3 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & 3/2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№106} \\ \left(\begin{array}{ccc} -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -5/4 & -1/4 & 9/4 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№107} \\ \left(\begin{array}{ccc} 4 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№108} \\ \left(\begin{array}{ccc} 3/8 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/16 & -3/8 & 3/8 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№109} \\ \left(\begin{array}{ccc} 4/7 & 1/7 & -5/14 \\ 1/7 & 2/7 & -3/14 \\ 5/14 & 3/14 & -1/28 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№110} \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \\ 2 & -5/2 & 3/4 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№111} \\ \left(\begin{array}{ccc} -3/4 & 1 & 1/2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1/4 & -1 & 1/2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№112} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 5/4 & -7/4 & 3/4 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№113} \\ \left(\begin{array}{ccc} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \\ -5/2 & -13/4 & 11/2 \end{array} \right) \end{array}$$

Тема "Характеристичний многочлен"

№1				
1	-4	5	-2	0
№2				
1	-2	-12	19	16
№3				
1	-3	8	3	-9
№4				
1	1	5,75	48,75	6,5
№5				
1	-4	5	-2	0
№6				
1	-2	-3	8	-4
№7				
1	-16	19	-4	0
№8				
1	-4	6	-4	1
№9				
1	-4	5	-2	0
№10				
1	0	-2	0	1
№11				
1	0	-2	0	1
№12				
1	1	-7	-1	6
№13				
1	-7	13	-9	2
№14				
1	-5	5	5	-6
№15				
1	-6	13	-12	4
№16				
1	1	-6	-4	8
№17				
1	-6	13	-12	4
№18				
1	-1	-7	1	6
№19				

1	-4	-1	16	-12	
№20					
1	-2	-3	4	4	
№21					
1	-2	-1	-1	-1	0
№22					
1	-9	19	7	8	56
№23					
1	0	-14	2	-1	-42
№24					
1	1	-20	-29	40	-98
№25					
1	-5	-30	-55	10	9
№26					
1	-5	-5	75	-90	-100
№27					
1	-2	-9,75	-24,25	-23,75	15,25
№28					
1	-6	8	16		
№29					
1	3	-2	-20		
№30					
1	0	-7	-21		
№31					
1	-4	5	-2		
№32					
1	-4	5	-2		
№33					
1	-6	12	-8		
№34					
1	-3	-4	12		
№35					
1	-1	-4	4		
№36					
1	3	3	1		
№37					
1	-5	8	-4		
№38					
1	-4	5	-2		

№39			
1	-4	5	-2
№40			
1	-2	-5	6
№41			
1	1	-8	-12
№42			
1	1	-2	0
№43			
1	-1	0	0
№44			
1	2	-4	-8
№45			
1	5	7	3
№46			
1	-3	3	-1
№47			
1	-3	3	-1
№48			
1	-6	11	-6
№49			
1	2	-4	-8
№50			
1	-3	-6	8
№51			
1	-1	-1	1
№52			
1	-7	14	-8
№53			
1	-1	-14	24
№54			
1	3	-4	-12
№55			
1	-6	11	-6
№56			
1	0	-3	-2
№57			
1	1	-1	-1
№58			

1	2	1	0
№59			
1	-5	7	-3
№60			
1	-2	-1	2
№61			
1	-8	13	10
№62			
1	-2	-15	28
№63			
1	-4	-13	43
№64			
1	-3	2	0
№65			
1	-2	-7	32
№66			
1	0	-8	-18
№67			
1	-4	-18	-20
№68			
1	-8	0	0
№69			
1	-4	2	9
№70			
1	-5	8	-4
№71			
1	-2	-1	2
№72			
1	-2	-1	2
№73			
1	-13	-7	6
№74			
1	-4	1	6
№75			
1	-7	15	-9
№76			
1	-5	8	-4
№77			
1	-7	14	-8

№78			
1	-1	-4	4
№79			
1	-6	9	-14
№80			
1	3	2	0
№81			
1	0	0	0
№82			
1	-6	-12	-8
№83			
1	9	27	27
№84			
1	-4	-2	8
№85			
1	-3	3	-1
№86			
1	-5	7	-3
№87			
1	-3	0	4
№88			
1	-10	33	-36
№89			
1	-2	-12	21
№90			
1	-7	16	-12
№91			
1	-7	16	-12
№92			
1	-7	16	-12
№93			
1	-4	-9	4
№94			
1	3	-7	-21
№95			
1	0	0	0
№96			
1	3	0	-4
№97			

1	0	-7	6
№98			
1	-11	25	21
№99			
1	0	-9	8
№100			
1	-20	25	-2

Тема "Власні вектори та власні значення"

Примітка: У відповіді спочатку іде власне значення а потім відповідний йому власний вектор або вектори

№1

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ & 1 & & 0 & 1 \end{array}$$

№2

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ & 1 & & 0 & & 1 \end{array}$$

№3

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 2 & & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ & 1 & & 1 & & 2 \end{array}$$

№4

$$\begin{array}{ccccc} & & & 1 & & 2 \\ 1 \text{ кр. } 2 & 1 & & 2 & & 0 \\ & & & 1 & & 1 \end{array}$$

№5

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & & & 1 \\ 0 & 1 & 1 \text{ кр. } 2 & & & 1 \\ & 2 & & & & 1 \end{array}$$

№6

$$\begin{array}{ccccc} & & & & & 1 \\ 1 \text{ кр. } 3 & & & 2 & & \\ & & & 0 & & \end{array}$$

№7

$$\begin{array}{ccccc} & & & 1 & & 1 \\ 0 \text{ кр. } 2 & 1 & & 1 & & 0 \\ & & & 1 & & 0 \end{array}$$

№8

$$\begin{array}{ccccc} & & & 1 & & 2 \\ 1 \text{ кр. } 2 & 1 & & 2 & & 2 \\ & & & 0 & & 1 \end{array}$$

№9

1	0	0
0 0	1 0	2 1
1	1	0

№10

1	0	1
0 0	1 2	0
0	1	1

№11

0	1	0
0 2	1 0	2 1
1	1	1

№12

	1	0
0 кр.2	2 2	1
	2	0

№13

	0
1 кр.3	1
	1

№14

	0
1 кр.3	1
	0

№15

1	1	1
0 0	1 0	2 2
1	0	2

№16

2	2	1
0 1	1 2	2 2
1	1	0

№17

1	2	1
0 2	1 0	2 1
1	1	1

№18

$$\begin{array}{cccc} 0 & & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 & -1 \\ & 1 & & 2 & & 0 \end{array}$$

№19

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -11 & 16 \\ & 0 & -1 & & -6 \end{array}$$

№20

$$\begin{array}{c} 2 \\ 1 \text{ кр.3} \quad 2 \\ \quad 1 \end{array}$$

№21

$$\begin{array}{cccc} 0 & & & 1 \\ 0 & 2 & 2 \text{ кр.2} & 2 \\ & 1 & & 2 \end{array}$$

№22

$$\begin{array}{cccc} & 1 & & 1 \\ 0 \text{ кр.2} & 1 & 2 & 0 \\ & 0 & & 2 \end{array}$$

№23

$$\begin{array}{cccc} 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ & 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

№24

$$\begin{array}{cccc} 2 & & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & & 2 & & 1 \end{array}$$

№25

$$\begin{array}{cccc} & 2 & & 2 \\ 0 \text{ кр.2} & 1 & 2 & 0 \\ & 0 & & 1 \end{array}$$

№26

$$\begin{array}{cccc} & 0 & & 1 \\ 0 & 2 & 1 \text{ кр.2} & 2 \\ & 1 & & 2 \end{array}$$

№27

1	2	1
0 0	1 2	2 1
2	1	1

№28

	1	1
1 кр.2	2	2 0
	1	0

№29

	1
1 кр.3	0
	0

№30

	1	1
1 кр.2	0	2 1
	1	2

№31

	0	1
1 кр.2	1	2 1
	1	0

№32

1		2
1 0	2 кр.2	1
1		2

№33

1	1
1 0	2 0
1	0

№34

0		1
0 1	2 кр.2	2
1		2

№35

	1	1
0 кр.2	0	2 1
	2	0

№36

	1		1
0 кр.2	0	1	1
	2		2

№37

Рациональних коренів немає

№38

	1		0
1 кр.2	1	2	0
	2		1

№39

	0		0
1	1	2 кр.2	0
	1		1

№40

	1		1
1 кр.2	1	2	1
	2		1

№41

	1		
0 кр.3	1		
	1		

№42

	1		1
1 кр.2	0	2	1
	1		0

№43

Рациональних коренів немає

№44

	2		1
0	1	1 кр.2	1
	1		1

№45

	1		1
0	1	2 кр.2	2
	0		2

№46

	1		1
1 кр.2	0	2	1
	0		2

№47

	1		1
0 кр.2	2	2	1
	2		0

№48

2		0		2
0 0	1	1	2	2
1		1		1

№49

1				0
1 1		2 кр.2		1
0				1

№50

1		1		1
0 0	1	0	2	2
1		2		1

№51

	1		2
1 кр.2	0	2	0
	1		1

№52

	1	0		1
0	0	1	2	2
	1	1		1

№53

1		1		0
1 0	2	0		1
2		1		1

№54

2		1		0
0 2	1	1	2	2
1		0		1

№55

	0		1
0 кр.2	1	2	1
	1		2

№56

	2		1
1 кр.2	2	2	2
	1		2

№57

	1		2
1 0	2 кр.2		1
	2		2

№58

	2		1
1 кр.2	2	2	2
	1		1

№59

	1		1
1 1	2 кр. 2		1
	0		2

№60

	1		
8 кр.1	1	2 корня комплексных	
	0		

№61

	2		
0 кр.3	2		
	1		

№62

	0		1	0
1 1	2	1	2	
	1		0	1

№63

	2		1	1
0 0	3	2	0	
	1		0	2

№64

1		1		7
0	1	1	1	4
	2		1	4

№65

0		1		1
1	0	2	2	0
	1		0	2

№66

1		1		1
1	1	2	-2	0
	2		0	2

№67

1		3		0
1	0	2	2	2
	-1	0		1

№68

1				2
0	0	1	кр. 2	2
	1			1

№69

		2		
1	кр.3	0		
		1		

№70

1				1
1	0	2	кр. 2	1
	1			1

№71

		0		
2	кр.3	2		
		1		

№72

		2		
2	кр.3	1		
		2		

№73

	2		0		2
0	1	1	0	3	4
	12		1		-3

№74

		0		1
0	кр. 2	2	1	0
		1		1

№75

	2		2		0
0	1	1	2	2	1
	0		1		2

№76

	0			1
0	1	1	кр.2	1
	1			0

№77

	0		1		2
1	1	-2	0	4	2
	2		1		3

№78

	1		1		1
0	1	1	0	2	1
	1		0		2

№79

	2			0
1	0	2	кр.3	1
	1			1
	1			1

№80

		2		1	0
1	кр.2	1	2	0	1
		1		1	0
		0		0	0

№81

	2		2		1	0
0	2	1	2	2	0	0
	2		0		1	0
	1		1		0	1

№82

	1	0	1	1		
0	-1	1	1	1	2	0
	1	0	0			2
	0	1	2			0

№83

	2	1				1
0	0	1	2	2	кр.2	0
	1	1				2
	1	2				1

№84

	0		1			
1	0	2	кр.3	2		
	1			1		
	1			2		

№85

		1	1	0		
1	кр.2	0	2	1	2	
		0	0	0	1	
		0	0	0	1	

№86

		1		1		
	1	0	2	1		
		2		2		
		1		1		

№87

		1			0	
1	кр.2	1	2	кр.2	1	
		2			1	
		2			0	

№88

		2		2	1	
0	кр.2	1	2	2	1	
		0		-1	0	
		0		0	1	

№89

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 0 \\ 0 \text{ кр.3} & -2 & 2 & 1 & 2 \\ & 1 & 0 & & 1 \\ & 0 & 1 & & 2 \end{array}$$

№90

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & & 0 & & 1 & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & & 2 \\ & 1 & & 2 & & -2 & & 0 \\ & 1 & & 1 & & 0 & & 2 \end{array}$$

№91

$$\begin{array}{cccc} & 1 & & 1 \\ 0 \text{ кр.3} & 1 & 2 & 2 \\ & 0 & & 0 \\ & 2 & & 2 \end{array}$$

№92

$$\begin{array}{cccc} & 1 & & 0 \\ 0 \text{ кр.3} & 1 & 2 & 2 \\ & 2 & & 1 \\ & 2 & & 1 \end{array}$$

№93

$$\begin{array}{cccc} & 0 & & 0 & & 1 \\ 0 & 1 & & 2 \text{ кр.3} & 1 & -1 \\ & 1 & & & 1 & 0 \\ & 1 & & & 0 & 1 \end{array}$$

№94

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 2 & & 1 \\ 0 \text{ кр.3} & 1 & 1 & 1 & 2 \\ & 2 & 0 & & 1 \\ & 0 & 1 & & 1 \end{array}$$

№95

$$\begin{array}{cccc} & 0 & & 1 \\ 0 \text{ кр.3} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 \end{array}$$

№96

	0		0
0 кр.3	1	1	0
	0		1
	0		0

№97

	2		1
0 кр.3	0	2	1
	1		0
	2		2

№98

	4	2		0		2
0	1	0	1	1	2	1
	2	0		0		1
	0	-1		1		1

№99

	1			0		1
0	1	1 кр.2	1	2	1	
	2		1			0
	0		1			0

№100

	1	0		0	0
1	0	1	2	0	2
	1	0		1	0
	0	1		0	1

№101

	2			2
1 кр.2	0	2 кр.2		1
	2			2
	1			0

№102

	0	2		1
1 кр.3	1	0	2	0
	0	0		1
	0	1		1

№103

	0			1
1	1	2 кр.3		2
	0			2
	1			1

№104

	1		0	0
0	1	1	0	1
	1		1	0
	2		0	2

№105

	2	2		2
0 кр.3	2	-1	1	1
	3	0		2
	0	3		0

Тема "Ранг матриці"

№1	Ранг=6
№2	Ранг=6
№3	Ранг=6
№4	Ранг=5
№5	Ранг=5
№6	Ранг=4
№7	Ранг=4
№8	Ранг=4
№9	Ранг=3
№10	Ранг=3
№11	Ранг=4
№12	Ранг=4
№13	Ранг=5
№14	Ранг=3
№15	Ранг=3
№16	Ранг=4
№17	Ранг=4
№18	Ранг=4
№19	Ранг=4
№20	Ранг=4
№21	Ранг=4
№22	Ранг=4
№23	Ранг=4
№24	Ранг=4
№25	Ранг=4
№26	Ранг=4
№27	Ранг=4
№28	Ранг=3
№29	Ранг=3
№30	Ранг=3
№31	Ранг=3
№32	Ранг=3
№33	Ранг=3
№34	Ранг=3
№35	Ранг=3
№36	Ранг=3
№37	Ранг=3

№38	Ранг=3
№39	Ранг=3
№40	Ранг=3
№41	Ранг=2
№42	Ранг=2
№43	Ранг=2
№44	Ранг=2
№45	Ранг=2
№46	Ранг=2
№47	Ранг=4
№48	Ранг=4
№49	Ранг=4
№50	Ранг=3
№51	Ранг=3
№52	Ранг=3
№53	Ранг=3
№54	Ранг=3
№55	Ранг=3
№56	Ранг=3
№57	Ранг=3
№58	Ранг=3
№59	Ранг=3
№60	Ранг=3
№61	Ранг=3
№62	Ранг=3
№63	Ранг=3
№64	Ранг=3
№65	Ранг=2
№66	Ранг=2
№67	Ранг=2
№68	Ранг=2
№69	Ранг=2
№70	Ранг=2
№71	Ранг=2
№72	Ранг=2
№73	Ранг=2
№74	Ранг=2
№75	Ранг=2
№76	Ранг=3

№77	Ранг=3
№78	Ранг=3
№79	Ранг=3
№80	Ранг=3
№81	Ранг=3
№82	Ранг=3
№83	Ранг=2
№84	Ранг=2
№85	Ранг=2
№86	Ранг=2
№87	Ранг=2
№88	Ранг=2
№89	Ранг=2
№90	Ранг=2
№91	Ранг=2
№92	Ранг=4
№93	Ранг=4
№94	Ранг=4
№95	Ранг=4
№96	Ранг=4
№97	Ранг=4
№98	Ранг=4
№99	Ранг=4
№100	Ранг=4
№101	Ранг=3
№102	Ранг=3

Тема: "Жорданові форми"

$$\text{№1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№7} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№8} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№11} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№13} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№14} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№15} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№16} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№17} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№18} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№55} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№56} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№57} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№58} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№59} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№60} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№61} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№62} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№63} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№64} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№65} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№66} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№67} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№68} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№69} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№70} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№71} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№72} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№73} \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№74} \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№75} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№76} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№77} \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№82} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№83} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№84} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№78} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№79} \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№80} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№81} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№85} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№86} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№87} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№88} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№90} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№91} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{№92} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№93} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№94} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№95} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№96} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№97} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№98} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\text{№99} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№100} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№101} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тема "Ортогоналізація систем векторів"

$$\begin{matrix} \text{№1} \\ \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ -6 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№2} \\ \left(\begin{array}{cccc} -2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 & 4 \\ -3 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№3} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№4} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№5} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№6} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№7} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\text{№8} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№9} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№10} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№11} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№13} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№15} \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№16} \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1,2 & -0,6 & -0,6 & 1,2 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,75 & -0,75 & 0,75 & -0,75 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№17} \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1,5 & -1 & -0,5 \\ 1/3 & -2/3 & -1 & 2/3 \\ -0,5 & 1/3 & -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№18} \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0,7 & 0,1 & 1,7 & -0,9 \\ 2,5 & -0,5 & -1 & 0 \\ 0 & -0,6 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№19} \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -0,5 & -0,5 \\ 1 & -2/9 & -4/9 & -4/9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№20} \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & -4/3 \\ 0 & 0,5 & -0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№21} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{№22} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№23} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№24} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -8 & 10 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№25} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№26} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№27} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№28} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№29} \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 2 & -7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№30} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№31} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -6 \\ 9 & -11 & -2,5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{№32} \\ \left(\begin{array}{ccc} 4 & 4 & -3 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№33} \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№34} \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & -3,5 & -1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№35} \\ \left(\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & -6 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№36} \\ \left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 7 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№37} \\ \left(\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 8 & -11 & 9 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№38} \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№39} \\ \left(\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№40} \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\text{№41} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№42} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№43} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -7 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{№44} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№45} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3,5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{№46} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{№47} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 9 & 3 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{№48} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -4/7 & 1 & -11/14 & 9/14 \\ -1/11 & 10/11 & 1 & -3/11 \end{pmatrix}$$

$$\text{№49} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№50} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№51} \\ \left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -6 & 5 & 2 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№52} \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1,5 & -1/2 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№53} \\ \left(\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ -1,56 & 2,08 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№54} \\ \left(\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 1,8 & 3,6 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№55} \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 7 \\ 5,18 & -0,74 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№56} \\ \left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 3,8 & 7,6 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№57} \\ \left(\begin{array}{cc} -3 & 4 \\ 3,04 & 2,28 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№58} \\ \left(\begin{array}{cc} 8 & -6 \\ 0,24 & 0,32 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№59} \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{№60} \\ \left(\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ -1/2 & 1/2 \end{array} \right) \end{matrix}$$

№61

3	0	0	3	3
1/3	0	1	1/3	-2/3
-4/5	1	3/5	1/5	3/5
2/3	-1/12	3/4	-17/12	3/4
24/43	40/43	-16/43	-8/43	-16/43

№62

1	0	1	0	1
1/3	2	-2/3	3	1/3
-14/41	-2/41	-13/41	-3/41	27/41
-26/27	4/27	26/27	2/9	0
0	15/13	0	-10/13	0

№63

2	3	1	1	3
3/4	9/8	3/8	3/8	-15/8
3/5	-8/5	9/5	9/5	0
-28/141	4/47	10/141	10/141	0
0	0	-1/2	1/2	0

№64

0	1	2	0	2
3	0	0	1	0
-1/5	4/9	-1/9	3/5	-1/9
1/28	1/7	13/28	-3/28	-15/28
2/15	8/15	-4/15	-2/15	0

№65

0	0	0	0	2
1	1	3	2	0
14/5	-1/5	-3/5	-2/5	0
0	-5/14	-1/14	2/7	0
0	4/3	-4/3	4/3	0

№66

1	1	1	1	1
-1/5	4/5	-1/5	-1/5	-1/5
-7/4	0	5/4	-3/4	5/4
0	0	1	0	-1
26/27	0	13/54	-13/9	13/54

№67

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 12/13 & 12/13 & -8/13 & 0 & -8/13 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 3/8 & -3/8 & 9/8 & 3/4 & -9/8 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

№68

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/4 & 1/4 & 2 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

№69

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2/3 & 2/3 & -2/3 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

№70

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2/19 & 45/19 & -17/19 \\ -80/61 & 30/61 & 70/61 \end{pmatrix}$$

№71

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -14/17 & 20/17 & -4/17 \\ 10/9 & 5/9 & -10/9 \end{pmatrix}$$

№72

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

№73

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 9/10 & 2 & -3/10 \\ -18/49 & 9/49 & 6/49 \end{pmatrix}$$

№74

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 13/22 & -9/22 & -3/11 \\ 0 & 4/13 & -6/13 \end{pmatrix}$$

№75

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4/9 & 5/9 & -2/9 \\ -1/5 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\text{№76} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2/5 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№77} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№78} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№79} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2/11 & 13/11 & -5/11 \\ -2/9 & 1/18 & 1/18 \end{pmatrix}$$

$$\text{№80} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№81} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2/9 & 2/9 & -8/9 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2/3 & 2/3 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№82} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -7/5 & 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1/3 & 1 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№83} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 9/11 & 6/11 & -13/11 \\ 34/37 & 11/37 & -42/37 & 17/37 \\ 4/5 & -4/5 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{№84} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -17/20 & 23/20 & 9/20 & -11/20 \\ 1/3 & -32/51 & 18/17 & -49/51 \\ 27/26 & 9/13 & -3/13 & -9/26 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№85} \\ \left(\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1/2 & 3 & -1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1/7 & -1/7 & -1/7 & 2/7 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№86} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1/10 & 3/10 & 0 \\ -10/41 & -20/41 & 60/41 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№87} \\ \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -12/7 & 2/7 & 11/7 & 12/7 \\ 1/118 & -5/59 & 2/59 & -1/118 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№88} \\ \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4/7 & 2 & -5/7 & -1/7 \\ -9/17 & 11/17 & 24/17 & -2/17 \\ 15/46 & -3/46 & 3/23 & -6/23 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№89} \\ \left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3/4 & -3/4 & -3/4 & 9/4 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№90} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -10/13 & 1 & 15/13 \\ 0 & 11/19 & 55/38 & -33/38 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

№91

1	1	1	2
-3/7	-3/7	4/7	1/7
-4/5	6/5	2/5	-2/5
4/3	0	4/3	-4/3

№92

0	2	3	0
3	-3/13	2/13	3
4/47	72/47	-48/47	4/47
1	0	0	-1

№93

3	2	0	0	3
-3/2	0	0	3	3/2
1/33	21/11	0	2/3	-43/33
18/191	-12/191	2	14/191	-10/191
9/16	-3/8	-1/16	7/16	-5/16

№94

1	1	1	2	2
-13/11	9/11	-2/11	7/11	-4/11
30/29	35/29	-11/29	-5/29	-22/29
-5/19	10/19	177/95	-15/19	-26/95
16/39	-32/39	8/13	16/13	-4/3

№95

0	3	2	0	1
0	6/7	-10/7	0	2/7
2	0	0	2	0
-3/2	-2/5	0	3/2	6/5
24/61	-18/61	0	-24/61	54/61

№96

0	1	2	2	1
0	3/5	1/5	-4/5	3/5
1	19/14	-12/7	6/7	5/14
134/93	-44/93	12/31	-6/31	8/93
-2/29	-8/29	-4/29	2/29	12/29

№97

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -6/11 & -2/11 & 0 & 20/11 & 0 \\ -3/5 & 9/5 & 0 & 0 & 2 \\ -3/19 & 9/19 & 1 & 0 & -9/19 \\ 3/7 & -9/7 & 9/7 & 0 & 9/7 \end{pmatrix}$$

№98

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/7 & 12/7 & -8/7 & 3 \\ 0 & 21/95 & 63/95 & -42/95 & -56/95 \end{pmatrix}$$

№99

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 14/17 & 24/17 & -20/17 & -20/17 & 14/17 \\ -3/13 & 6/13 & 8/13 & -5/13 & -3/13 \\ 5/11 & -10/11 & 5/11 & -10/11 & 5/11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

№100

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

№101

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 19/11 & 0 & -9/11 & 8/11 \end{pmatrix}$$

№102

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & -6/5 & 2 & 1 \\ -3/2 & 3 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

№103

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

№104

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 8/5 & -4/5 & 1 & 0 \\ -8/21 & 4/21 & 16/21 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№105} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 57/20 & -9/20 & -3/20 & -9/20 \\ 0 & -5/19 & 30/19 & -5/19 \end{pmatrix}$$

$$\text{№106} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 9/5 & -3/5 & 1 \\ 1/7 & -9/14 & 3/14 & 8/7 \end{pmatrix}$$

$$\text{№107} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 3 \\ 36/19 & 1 & -36/19 & 12/19 \end{pmatrix}$$

$$\text{№108} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№109} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -3/5 & -4/5 & 1/5 & 3/5 \\ -5/7 & 5/7 & 11/7 & -2/7 \end{pmatrix}$$

$$\text{№110} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4/3 & 1 & -5/3 & 1/3 \\ -7/17 & -1/17 & -4/17 & 11/17 \end{pmatrix}$$

$$\text{№111} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1/3 & -2/3 & 1 & 4/3 \\ -2/5 & 6/5 & 6/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

$$\text{№112} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -9/11 & -9/11 & 0 & 27/11 \end{pmatrix}$$

$$\text{№113} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4/5 & 3 & 8/5 \end{pmatrix}$$

Зміст

Вступ	3
Завдання і вправи	6
<i>Системи лінійних рівнянь</i>	
Приклад розв'язування	6
Вправи	12
<i>Визначники</i>	
Приклад розв'язування	28
Вправи	30
<i>Обернені матриці</i>	
Приклад розв'язування	45
Вправи	47
<i>Характеристичний многочлен</i>	
Приклад розв'язування	61
Вправи	67
<i>Власні значення та власні вектори</i>	
Приклад розв'язування	76
Вправи	78
<i>Ранг матриці</i>	
Приклад розв'язування	87
Вправи	88
<i>Жорданові форми</i>	
Приклад розв'язування	104
Вправи	108
<i>Ортогоналізація систем векторів</i>	
Приклад розв'язування	120
Вправи	123
Відповіді до завдань	
Системи лінійних рівнянь	138
Визначники	146
Обернені матриці	147
Характеристичний многочлен	163
Власні значення та власні вектори	169
Ранг матриці	182
Жорданові форми	185
Ортогоналізація систем векторів	193